

ΗΥ-217: Πιθανότητες -Χειμερινό Εξάμηνο 2012
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις: Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 14/11/2012

Ημερομηνία Παράδοσης: 28/11/2012

Θέματα: Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές (III).

Άσκηση 1.

(α) Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων των δυνατών τιμών των x και y είναι 1. Συνεπώς:

$$1 \cdot 1 \cdot c + 1 \cdot 3 \cdot c + 2 \cdot 1 \cdot c + 2 \cdot 3 \cdot c + 4 \cdot 1 \cdot c + 4 \cdot 3 \cdot c = 1 \rightarrow c = \frac{1}{28}$$

(β) Υπάρχουν τρία σημεία για τα οποία ισχύει $Y < X$, τα $(1, 2)$, $(4, 1)$ και $(4, 3)$:

$$P(Y < X) = P((1, 2)) + P((4, 1)) + P((4, 3)) = 2 \cdot 1/28 + 4 \cdot 1/28 + 4 \cdot 3/28 = 18/28$$

(γ) Υπάρχουν δύο σημεία για τα οποία ισχύει $Y > X$, τα $(1, 3)$ και $(2, 3)$:

$$P(Y > X) = P((1, 3)) + P((2, 3)) = 1 \cdot 3/28 + 2 \cdot 3/28 = 9/28$$

(δ) Υπάρχει μόνο ένα σημείο για το οποίο ισχύει $Y = X$:

$$P(Y = X) = P((1, 1)) = 1 \cdot 1/28 = 1/28$$

Παρατηρήστε ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων στο ερωτήματα (β), (γ) και (δ) είναι 1, όπως αναμένεται.

(ε) Υπάρχουν τρία σημεία για τα οποία ισχύει $y = 3$, τα $(1, 3)$, $(2, 3)$ και $(4, 3)$:

$$P(Y = 3) = P((1, 3)) + P((2, 3)) + P((4, 3)) = 3/28 + 6/28 + 12/28 = 21/28$$

(στ) Γενικά, για δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές X και Y για τις οποίες είναι ορισμένη η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας, έχουμε:

$$p_X(x) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y), \quad p_Y(y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y)$$

Στην δεδομένη περίπτωση το πλήθος των δυνατών ζευγών (X, Y) είναι μικρό, οπότε μπορούμε να υπολογίζουμε τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας με απαρίθμηση. Για παράδειγμα:

$$p_X(2) = P((2, 1)) + P((2, 3)) = 8/28$$

Συνολικά έχουμε:

$$p_X(x) = \begin{cases} 4/28, & x = 1 \\ 8/28, & x = 2 \\ 16/28, & x = 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$p_Y(y) = \begin{cases} 7/28, & y = 1 \\ 21/28, & y = 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(3) Γενικά, η μέση τιμή για οποιαδήποτε διακριτή τυχαία μεταβλητή X είναι:

$$E[X] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} xp_X(x).$$

Για αυτό το πρόβλημα,

$$E[X] = 1(1/7) + 2(2/7) + 4(4/7) = 3$$

και

$$E[Y] = 1(1/4) + 3(3/4) = 5/2$$

(η) Η διασπορά για μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X υπολογίζεται ως $E[X^2] - E[X]^2$ ή ως $E[(X - E[X])^2]$. Χρησιμοποιώντας τον δεύτερο τρόπο έχουμε:

$$\text{var}(X) = (1-3)^2(1/7) + (2-3)^2(2/7) + (4-3)^2(4/7) = 10/7$$

$$\text{var}(Y) = (1-5/2)^2(1/4) + (3-5/2)^2(3/4) = 5/8.$$

Άσκηση 2. Αυτή η άσκηση ήταν το 4ο θέμα της Προόδου του Δεκεμβρίου 2004. Δείτε την λύση στη σελίδα http://www.csd.uoc.gr/~hy217/HW2004/midterm_Dec2004_sol.pdf

Άσκηση 3.

(α) Η συνάρτηση πιθανότητας είναι μια διωνυμική με $p = 1/4$ και $n = 32$, άρα

$$p_K(k) = \begin{cases} \binom{32}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{32-k}, & \text{για } k = 0, 1, \dots, 32 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(β)

$$\mathbf{E}[K] = np = 32 \cdot \frac{1}{4} = 8 \text{ αυτοκίνητα}$$

$$\text{var}(K) = np(1-p) = 32 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = 6 \text{ αυτοκίνητα}^2$$

(γ) Πρώτα υπολογίζουμε ότι $\mathbf{E}[M] = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$ αυτοκίνητα. Άρα:

$$\mathbf{E}[Q_1] = \mathbf{E}[K \cdot c_1] = c_1 \cdot \mathbf{E}[K] = \$640$$

$$\mathbf{E}[Q_2] = \mathbf{E}[M \cdot c_2] = c_2 \cdot \mathbf{E}[M] = \$800$$

Άρα, η δεύτερη στρατηγική επιφέρει μεγαλύτερο κέρδος στον Κώστα.

(δ)

$$\begin{aligned} p_L(l) &= P(\text{Ο Κώστας πουλάει } L \text{ αυτοκίνητα}) \\ &= P(\text{Ο Κώστας πουλάει } L \text{ αυτοκίνητα} | \text{Κορώνα}) \cdot P(\text{Κορώνα}) \\ &\quad + P(\text{Ο Κώστας πουλάει } L \text{ αυτοκίνητα} | \text{Γράμματα}) \cdot P(\text{Γράμματα}) \\ &= p_K(l) \cdot \frac{1}{2} + p_M(l) \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Έχουμε ότι:

$$p_L(l) = \begin{cases} \frac{1}{2} \binom{32}{l} \left(\frac{1}{4}\right)^l \left(\frac{3}{4}\right)^{32-l} + \frac{1}{2} \binom{16}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^l \left(\frac{1}{2}\right)^{16-l}, & \text{για } l = 0, 1, \dots, 16 \\ \frac{1}{2} \binom{32}{l} \left(\frac{1}{4}\right)^l \left(\frac{3}{4}\right)^{32-l}, & \text{για } l = 17, 18, \dots, 32 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άρα:

$$\mathbf{E}[L] = \mathbf{E}[L | \text{Κορώνα}] \cdot P(\text{Κορώνα}) + \mathbf{E}[L | \text{Γράμματα}] \cdot P(\text{Γράμματα}) = \mathbf{E}[K] \cdot \frac{1}{2} + \mathbf{E}[M] \cdot \frac{1}{2} = 8 \text{ αυτοκίνητα}.$$

(ε)

$$\begin{aligned}
P(\text{Κορώνα} | L = 4) &= \frac{P(L = 4 \text{ και Κορώνα})}{P(L = 4)} \\
&= \frac{P(L = 4 | \text{Κορώνα}) \cdot P(\text{Κορώνα})}{P(L = 4)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \binom{32}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^{28}}{\frac{1}{2} \binom{32}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^{28} + \frac{1}{2} \binom{16}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{12}}
\end{aligned}$$

Αν ο Κώστας πουλήσει 18 αυτοκίνητα σε μια ημέρα, τότε έχουμε:

$$P(\text{Κορώνα} | L = 18) = 1.$$

(στ) Πρώτα, υπολογίζουμε την μέση τιμή του C και την αναμενόμενη τιμή για το C^2 :

$$\mathbf{E}[C] = 90 \cdot \frac{1}{2} + 110 \cdot \frac{1}{2} = 100\$,$$

$$\mathbf{E}[C^2] = 8100 \cdot \frac{1}{2} + 12100 \cdot \frac{1}{2} = 10100\2$

Εφόσον η K και C είναι ανεξάρτητες:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Q] &= \mathbf{E}[K \cdot C] = \mathbf{E}[K] \cdot \mathbf{E}[C] = 800\$ \\
\mathbf{E}[Q^2] &= \mathbf{E}[K^2 \cdot C^2] = \mathbf{E}[K^2] \cdot \mathbf{E}[C^2] \\
&= (\text{var}(K) + (\mathbf{E}[K])^2) \cdot \mathbf{E}[C^2] \\
&= (6 + 64) \cdot 10100 \\
&= 707000\$^2. \\
\text{var}(Q) &= \mathbf{E}[Q^2] - (\mathbf{E}[Q])^2 \\
&= 707000 - 640000 \\
&= 67000\$^2
\end{aligned}$$

(ζ) Έστω Y είναι το πλήθος των πελατών που εξυπηρέτησε μέχρι και την πρώτη πώληση. Η Y είναι μια γεωμετρική τυχαία μεταβλητή με $p = 1/4$ και:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^{y-1} \left(\frac{1}{4}\right), & y = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{p} = 4, \text{ var}(Y) = \frac{1-p}{p^2} = 12.$$

Παρατηρούμε ότι $X = Y - 1$, οπότε έχουμε:

$$p_X(x) = P(X = x) = P(Y = x + 1) = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^{y-1} \left(\frac{1}{4}\right), & y = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

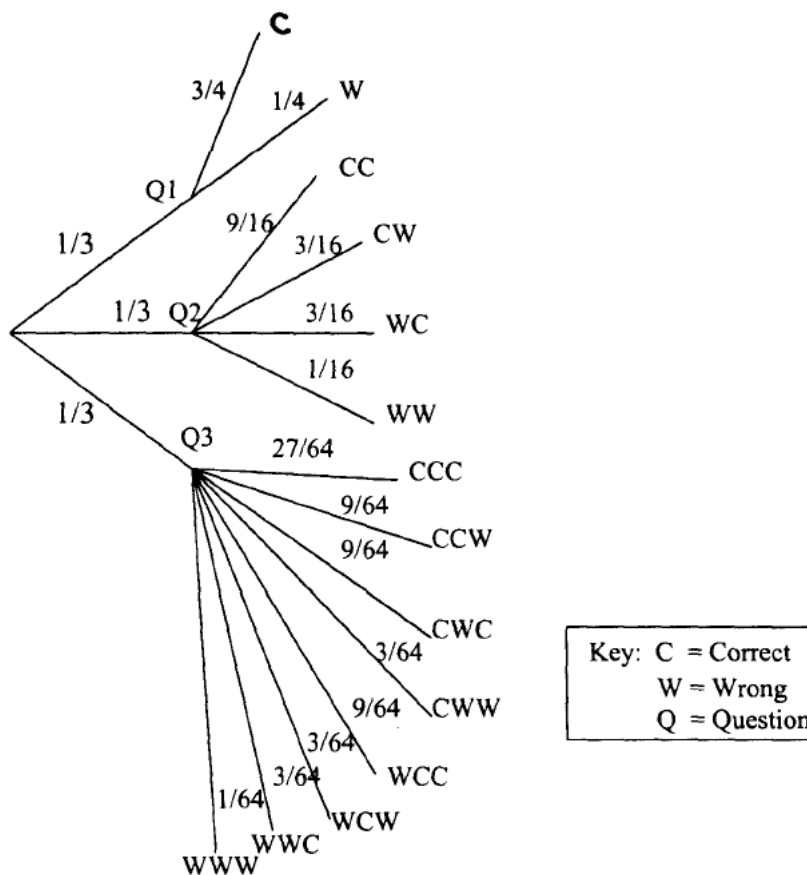
$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y] - 1 = 3, \text{ var}(X) = \text{var}(Y) = 12.$$

Άσκηση 4.

Το δενδρόγραμμα της άσκησης φαίνεται στο σχήμα 1.

(α) Ο δειγματοχώρος της άσκησης χωρίζεται σε 3 περιοχές ανάλογα με το η May B.Right ερωτήθηκε μία, δύο ή τρεις ερωτήσεις. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned}
P(\text{May απαντάει λάθος σε όλες τις ερωτήσεις}) &= P(W|Q1)P(Q1) + P(WW|Q2)P(Q2) \\
&\quad + P(WWW|Q3)P(Q3) \\
&= 1/4 \times 1/3 + 1/16 \times 1/3 + 1/64 \times 1/3 \\
&= 21/192
\end{aligned}$$



Σχήμα 1: Το δενδρόγραμμα της άσκησης 4.

(β) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned}
 P(Q3 | \text{May απαντάει λάθος σε όλες τις ερωτήσεις}) &= \frac{P(Q3 \cap \text{May απαντάει λάθος σε όλες τις ερωτήσεις})}{P(\text{May απαντάει λάθος σε όλες τις ερωτήσεις})} \\
 &= \frac{1/3 \times 1/64}{21/192} \\
 &= \frac{1}{21}
 \end{aligned}$$

(γ) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X είναι:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/3, & \text{αν } x = 1, 2, 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

η μέση τιμή της:

$$E[X] = 1(1/3) + 2(1/3) + 3(1/3) = 2$$

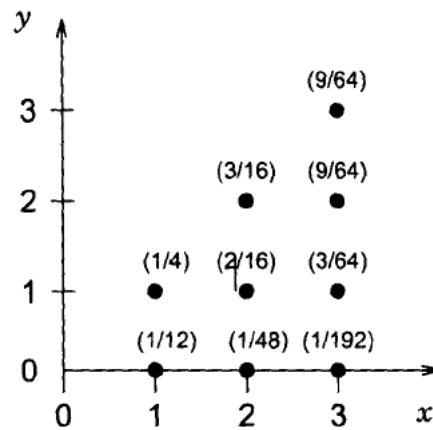
και για την διασπορά έχουμε:

$$E[X^2] = 1(1/3) + 4(1/3) + 9(1/3) = 14/3$$

$$\text{var}(X) = 14/3 - 4 = 2/3$$

(δ) Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p_{X,Y}(x, y)$ για τις τ.μ. X και Y φαίνεται στο σχήμα 2. Οι τιμές της $p_{X,Y}(x, y)$ υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας την σχέση: $p_{X,Y}(x, y) = p_{Y|X}(y|x)p_X(x)$.

(ε) Το επιμίσθιο μπορεί να οριστεί ως μια τυχαία μεταβλητή $B = 10X + 20Y$. Η μέση τιμή της B μπορεί να υπολογιστεί, αφού είναι η μέση τιμή ενός γραμμικού συνδιασμού δυο τ.μ. είναι



Σχήμα 2: Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p_{X,Y}(x,y)$ για το ερώτημα (δ) της άσκησης 4.

ο γραμμικός συνδιασμός των μέσων τιμών των δύο τ.μ. Πρώτα υπολογίζουμε την μέση τιμή της Y . Από το ερώτημα (δ), μπορούμε να υπολογίσουμε την $\sigma.π.π$ της Y χρησιμοποιώντας τον τύπο: $p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x,y)$, που μας δίνει:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 7/64, & y = 0 \\ 27/64, & y = 1 \\ 21/64, & y = 2 \\ 9/64, & y = 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Συνεπώς:

$$E[Y] = 0(7/64) + 1(27/64) + 2(21/64) + 3(9/64) = 96/64 = 3/2.$$

Οπότε:

$$E[B] = E[10X + 20Y] = 10E[X] + 20E[Y] = 50.$$

Για να υπολογίσουμε την διασπορά της B , χρησιμοποιούμε τον τύπο $var(B) = E[B^2] - (E[B])^2$. $E[B^2]$ μπορεί να υπολογιστεί αν παρατηρήσουμε ότι $B = g(X, Y)$, άρα:

$$\begin{aligned} E[B^2] &= \sum_x \sum_y (g(X, Y))^2 p_{X,Y}(x, y) \\ &= \sum_x \sum_y (10X + 20Y)^2 p_{X,Y}(x, y) \\ &= 100(1/12) + 900(1/4) + 400(1/48) + 1600(2/16) + 3600(3/16) \\ &\quad + 900(1/192) + 2500(3/64) + 4900(9/64) + 8100(9/64) \\ &= 588800/192 \\ var(B) &= E[B^2] - (E[B])^2 = 108800/192 \end{aligned}$$

(στ) Η τ.μ. Z ορίζεται ως το συνολικό πλήθος λάθος απαντήσεων της MBR σε μια σειρά 20 διαλέξεων. Οι διαλέξεις μεταξύ τους είναι ανεξάρτητες. Αυτό σημαίνει ότι το πλήθος των ερωτήσεων που απαντάει λάθος σε κάθε διάλεξη είναι ανεξάρτητο από το πλήθος των ερωτήσεων που απάντησε σε κάποια άλλη διάλεξη. Ομοίως, το πλήθος των ερωτήσεων που απαντά σε μια διάλεξη είναι ανεξάρτητο από το πλήθος των ερωτήσεων σε μια άλλη. Ας ορίσουμε την τ.μ. Q_n ως το πλήθος των ερωτήσεων που απαντά λάθος στην n -οστή διάλεξη. Συνεπώς $Z = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{20}$ και

$$E[Z] = E[Q_1] + E[Q_2] + \dots + E[Q_{20}]$$

επειδή όμως Q_n είναι ομοιόμορφα κατανομημένη σε κάθε διάλεξη, έχουμε:

$$E[Z] = 20E[Q_n].$$

Επειδή Q_n είναι το πλήθος των ερωτήσεων που απαντά λάθος στην n -οστή διάλεξη, $Q_n = X - Y = f(X, Y)$. Οπότε:

$$E[Q_n] = E[X - Y]E[X] = E[Y] = 2 - 3/2 = 1/2$$

και

$$E[X] = 20E[Q_n] = 10.$$

Εφόσον οι τ.μ. Q_n είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανομημένες (i.i.d), έχουμε ότι:

$$\text{var}(Z) = \text{var}(Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{20}) = 20\text{var}(Q_n).$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση $\text{var}(Q_n) = E[Q_n^2] - (E[Q_n])^2$, έχουμε $E[Q_n^2]$. Όπως και στο ερώτημα (ε), όταν $B = g(X, Y)$, $Q_n = f(X, Y)$, τότε:

$$E[Q_n^2] = \sum_x \sum_y (f(X, Y))^2 p_{X,Y}(x, y) = \sum_x \sum_y (X - Y)^2 p_{X,Y}(x, y)$$

$$E[Q_n^2] = 1/12 + 2/16 + 9/64 + 4(1/48) + 4(3/64) + 9(1/192) = 2/3$$

$$\text{var}(Q_n) = 2/3 - 1/4 = 5/12$$

$$\text{var}(Z) = 20(5/12) = 100/12$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να υπολογίσουμε την σ.π.π για την Q_n και να υπολογίσουμε μετά:

$$E[Q_n^2] = \sum_q q^2 p_{Q_n}(q)$$

Η σ.π.π για την Q_n μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο:

$$p_{Q_n}(q) = \sum_{x,y|f(x,y)=q} p_{X,Y}(x, y)$$

και είναι:

$$p_{Q_n}(q) = \begin{cases} 101/192, & q = 0 \\ 67/192, & q = 1 \\ 13/192, & q = 2 \\ 1/192, & q = 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$