

HY-217: Πιθανότητες -Χειμερινό Εξάμηνο 2012
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 5/11/2012

Ημερομηνία Παράδοσης: 14/11/2012

Θέματα: Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές (II).

Άσκηση 1. Παίζετε το εξής παιχνίδι: Ρίχνετε ένα δίκαιο εξαέδρο ζάρι. Αν έρθει 1, κερδίζετε 8 ευρώ. Αν έρθει 2 ή 3, κερδίζετε 5 ευρώ. Αν έρθει 4, 5, ή 6, χάνετε z ευρώ. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X ως το ποσό που κερδίζετε (αρνητικές τιμές για την X δηλώνουν ποσό που χάνετε).

- (α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας, $p_X(x)$, της τ.μ. X .
- (β) Υπολογίστε τη τιμή z για την οποία το μέσο κέρδος είναι ίσο με -1, δηλαδή $\mu_X = -1$.
- (γ) Για την τιμή της σταθεράς z που βρήκατε στο (β), υπολογίστε τη μέση τιμή $E[\ln(|X|)]$.

Άσκηση 2. Έχετε εννιά σοκολάτες στην τσάντα σας: δύο μπλε, τρεις κίτρινες και τέσσερις κόκκινες. Ο φίλος σας επιλέγει τυχαία τρεις σοκολάτες και σας δίνει 50 λεπτά για κάθε μπλε, 25 λεπτά για κίτρινη, και 0 λεπτά για κάθε κόκκινη. Έστω X το συνολικό ποσό σε λεπτά του ευρώ που σας πληρώνει. Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της X καθώς και το μέσο κέρδος σας.

Άσκηση 3. Παρακολουθείτε ένα βίντεο στο YouTube το οποίο περιέχει 30 καρέ το δευτερόλεπτο. Κάθε καρέ αποτελείται από 1000 πακέτα. Κάθε φορά που ένα καρέ αναπαράγεται στον υπολογιστή σας, αν 5 ή περισσότερα πακέτα αυτού του καρέ έχουν χαθεί (δηλαδή έχετε λάβει 995 ή λιγότερα πακέτα του καρέ), παρατηρείτε το λεγόμενο φαινόμενο του buffering (καθυστέρηση στην αναπαραγωγή του βίντεο). Κάθε πακέτο χάνεται με πιθανότητα p , ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα.

- (α) Έστω ότι $p = 0.001$. Υπολογίστε την πιθανότητα να παρατηρήσετε buffering.
- (β) Υπολογίστε ξανά την παραπάνω πιθανότητα χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της Poisson κατανομής.

Άσκηση 4. Ο φίλος σας ο Κώστας είναι φανατικός τζογαδόρος ο οποίος όμως δεν έχει παρακολουθήσει το HY-217. Ακούει ότι ένα καζίνο στο Vegas προσφέρει λαχεία. Κάθε λαχείο κερδίζει με πιθανότητα $p = 1/50$. Ένα λαχείο μπορεί να αγοραστεί "επενδύοντας" το ποσό των C δολαρίων. Αν κληρωθεί το λαχείο, ο παίκτης κερδίζει 100 φορές την "επένδυσή" του: $X = 100C$ ευρώ. Αν δεν κληρωθεί, ο παίκτης λαμβάνει πίσω $X = 0$ ευρώ, δηλαδή χάνει όλη την αρχική του "επένδυση".

- (α) Ο Κώστας θέλει να ποντάρει όλες τις οικονομίες του (100 δολάρια) αγοράζοντας ένα και μοναδικό λαχείο για $C = 100$ δολάρια. Έστω X το ποσό που κερδίζει.
 - (i) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X .
 - (ii) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $E[X]$, και την τυπική απόκλιση, σ_X , του κέρδους.

(β) Καθώς έχετε παρακολουθήσει το HY-217, συμβουλευέτε το φίλο σας να ακολουθήσει διαφορετική στρατηγική με τα λεφτά του: Αντί να αγοράσει 1 λαχείο για $C = 100$ δολάρια, να αγοράσει $n = 100$ λαχεία το καθένα με $C = 1$ δολάριο. Έστω Y το ποσό που κερδίζει ο Κώστας ακολουθώντας τη δική σας στρατηγική.

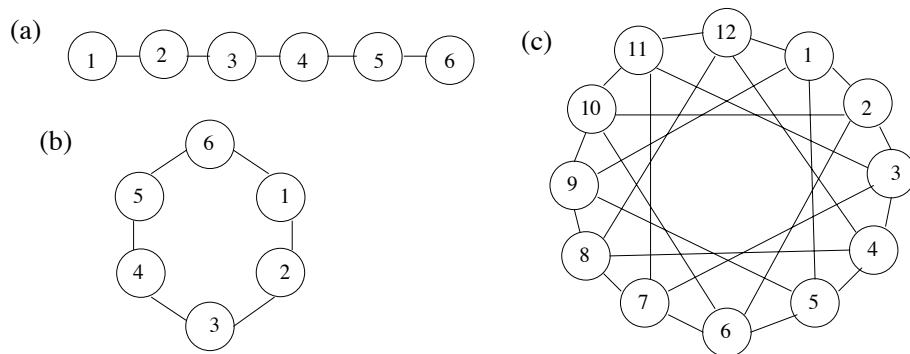
- (i) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Y .
 (ii) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $E[Y]$, και την τυπική απόκλιση, σ_Y , του κέρδους.

Είναι πράγματι καλύτερη η στρατηγική σας; Γιατί;

Άσκηση 5. [Απόσταση μεταξύ δύο τυχαία επιλεγμένων κορυφών]

Λύστε το ακόλουθο πρόβλημα για κάθε έναν απο τους τρεις μη κατευθυνόμενους γράφους του Σχήματος 1. Σε κάθε γράφο, δύο κορυφές (κόμβοι), i και j , επιλέγονται τυχαία. Όλες οι δυνατές τιμές των (i, j) έχουν την ίδια πιθανότητα να επιλεγούν, συμπεριλαμβανομένης και της περίπτωσης $i = j$. Ορίζουμε την απόσταση D μεταξύ των κορυφών i και j , ως τον ελάχιστο αριθμό των ακμών που πρέπει να περάσουμε για να πάμε από το i στο j . Προφανώς, αν $i = j$ τότε $D = 0$.

Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας της τ.μ. D για κάθε γράφο του σχήματος ξεχωριστά. Υπολογίστε επίσης τη μέση τιμή και τη διασπορά της D . Για τους γράφους (b) και (c), λόγω συμμετρίας, υποθέστε ότι $i = 1$ και μόνο το j επιλέγεται τυχαία.



Σχήμα 1: Οι τρεις γράφοι της Άσκησης 5.

Άσκηση 6.

(α) Ένα εργαστήριο έχει N υπολογιστές συνδεδεμένους στο δίκτυο. Κάθε υπολογιστής δημιουργεί ένα πακέτο δεδομένων ανά μονάδα χρόνου με πιθανότητα p , ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Γράψτε ένα μικρό πρόγραμμα (π.χ. σε Matlab) για να προσομοιώσετε το συνολικό αριθμό των πακέτων που δημιουργούνται. Χρησιμοποιείστε τις τιμές $N = 20$ και $p = 0.2$, και ονομάστε X την σχετική τ.μ.

(β) Δημιουργείτε 100 δείγματα της τ.μ. X και εκτιμήστε την συνάρτηση πιθανότητας. Με άλλα λόγια, σχηματίστε το ιστόγραμμα των 100 δειγμάτων. Τι είδους τ.μ. είναι η X ; Δώστε τη γραφική παράσταση της εκτιμούμενης συνάρτησης πιθανότητας (του ιστογράμματος) καθώς και της θεωρητικής συνάρτησης πιθανότητας.

(γ) Δώστε τις γραφικές παραστάσεις της Διωνυμικής συνάρτησης πιθανότητας για:

$$(n, p) = (13, 1/2), (12, 1/2), (19, 1/3), \text{ και } (21, 1/3).$$

Τι παρατηρείτε;

(δ) Τέλος, δώστε τη γραφική παράσταση της Διωνυμικής για $(n = 100, p = 0.1)$ καθώς και της Poisson με παράμετρο $\lambda = 10$. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.