

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2012
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 24/10/2012

Ημερομηνία Παράδοσης: 5/11/2012

Άσκηση 1.

(α) Το πλήθος των πιθανών χειρών που μπορεί να πάρει ο πρώτος παίχτης είναι $\binom{52}{13}$. Μονάχα ένα από αυτά τα χέρια αποτελείται από 13 σπαθιά μόνο, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$\frac{1}{\binom{52}{13}}.$$

(β) Τα τέσσερα γεγονότα, ο παίχτης 1 να πάρει 13 σπαθιά, ο παίχτης 2 να πάρει 13 σπαθιά, ο παίχτης 3 να πάρει 13 σπαθιά, και ο παίχτης 4 να πάρει 13 σπαθιά, είναι ξένα μεταξύ τους. Οπότε μπορούμε να προσθέσουμε τις επιμέρους πιθανότητες για να πάρουμε την ζητούμενη πιθανότητα. Κάθε επιμέρους γεγονός έχει πιθανότητα $\frac{1}{\binom{52}{13}}$, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$\frac{4}{\binom{52}{13}}.$$

(γ) Έστω A το γεγονός ότι ο παίχτης 1 έχει 13 σπαθιά και B το γεγονός ότι ο παίχτης 1 έχει τον Ρήγα κούπα. Αν γνωρίζουμε ότι το γεγονός B ισχύει, τότε ξέρουμε ότι δεν μπορεί να έχει και τα 13 σπαθιά. Με άλλα λόγια $P(A|B) = 0$. Όμως γνωρίζουμε ότι $P(A) = \frac{1}{\binom{52}{13}}$, οπότε τα A και B δεν είναι ανεξάρτητα. Επιπλέον τα γεγονότα A και B είναι ξένα μεταξύ τους, και γενικά γνωρίζουμε ότι όταν δυο γεγονότα με μη μηδενική πιθανότητα είναι ξένα μεταξύ τους, τότε δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητα.

(δ) Έστω A το γεγονός ότι τα φύλλα του πρώτου παίχτη έχουν όλα το ίδιο σχήμα και B το γεγονός ότι ο παίχτης 1 παίρνει τον Ρήγα κούπα. Θα δείξουμε ότι τα δύο γεγονότα είναι ανεξάρτητα δείχνοντας ότι $P(B|A) = P(B)$. Γνωρίζουμε ότι $P(B|A) = 1/4$, αφού δεδομένου ότι τα φύλλα του παίχτη 1 έχουν όλα το ίδιο σχήμα, γνωρίζουμε ότι το σχήμα μπορεί να είναι ένα από τα τέσσερα, είτε κούπες, είτε καρό, είτε σπαθιά, είτε μπαστούνια. Κάθε σχήμα είναι ισοπίθανο με κάθε άλλο με πιθανότητα $1/4$. Παρατηρούμε επιπλέον ότι $P(B) = 1/4$, αφού κάθε ένας από τους 4 παίχτες μπορεί να πάρει τον Ρήγα κούπα με ίση πιθανότητα, άρα η πιθανότητα ο παίχτης 1 να πάρει τον Ρήγα κούπα είναι $1/4$. Οπότε εφόσον $P(B|A) = P(B)$, τότε τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα. Επιπλέον παρατηρήστε ότι τα δυο αυτά γεγονότα δεν είναι ξένα μεταξύ τους, καθώς η τομή τους δεν είναι κενή - και αυτή είναι το γεγονός ο παίχτης 1 να πάρει όλες τις κούπες.

Άσκηση 2.

(α) Δεδομένου ότι έχουμε φέρει ακριβώς μία κεφαλή, η κεφαλή μπορεί να έχει συμβεί σε οποιαδήποτε από τις n ρίψεις του κέρματος. Άρα η πιθανότητα να έρθει κεφαλή στην πρώτη ρίψη είναι ίση με $\frac{1}{n}$.

(β) Δεδομένου ότι έχουμε φέρει ακριβώς δύο κεφαλές, αν η πρώτη ρίψη φέρει κεφαλή, τότε υπάρχουν $n - 1$ θέσεις όπου η δεύτερη κεφαλή μπορεί συμβεί. Ο συνολικός αριθμός όλων των δυνατών συνδυασμών όπου δύο κεφαλές μπορούν να έρθουν σε n ρίψεις είναι $\binom{n}{2}$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα

είναι:

$$\frac{n-1}{\binom{n}{2}}.$$

(γ) Δεδομένου ότι έχουμε φέρει 7 κεφαλές, η πιθανότητα ότι οι 3 από τις πρώτες 4 ρίψεις να έφεραν κεφαλή αποτελείται από τρία μέρη:

- Το συνολικός αριθμός να έρθουν 3 κεφαλές στις πρώτες 4 ρίψεις είναι $\binom{4}{3}$.
- Το συνολικός αριθμός να έρθουν 4 κεφαλές στις υπόλοιπες $n-4$ ρίψεις είναι $\binom{n-4}{4}$.
- Το συνολικός αριθμός να έρθουν 7 κεφαλές σε n ρίψεις είναι $\binom{n}{7}$.

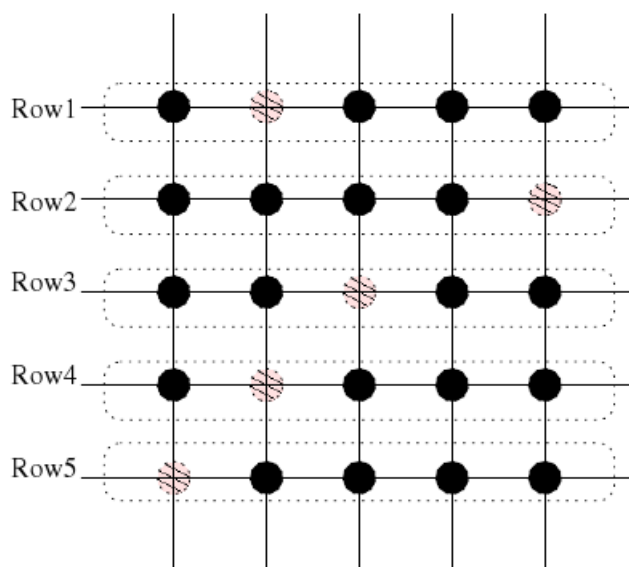
Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{\binom{4}{3} \binom{n-4}{4}}{\binom{n}{7}}.$$

Άσκηση 3.

(α) Υπάρχουν συνολικά $25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 = 25!/20!$ τρόποι για να επιλέξεις 5 μπάλες από ένα σύνολο 25. Αυτό προκύπτει αν σκεφτούμε ότι αρχικά υπάρχουν 25 μπάλες να επιλέξουμε για την πρώτη μπάλα, 24 επιλογές για την δεύτερη κοκ. Αν τώρα θέλουμε να επιλέξουμε 5 μπάλες, αλλά να βρίσκονται σε διαφορετικές σειρές, το πλήθος των επιλογών μας αλλάζει. Για την πρώτη μπάλα έχουμε 25 επιλογές, για την δεύτερη μπάλα δεν μπορούμε να επιλέξουμε μπάλες που βρίσκονται στην ίδια σειρά με την πρώτη μπάλα, άρα έχουμε $25-5 = 20$ επιλογές. Ομοίως για την τρίτη μπάλα, έχουμε $20-5 = 15$ επιλογές, εφόσον δεν μπορεί να είναι από την ίδια σειρά που πήραμε την πρώτη ή την δεύτερη μπάλα. Με παρόμοιο τρόπο προκύπτουν και τα πλήθη των δυνατών επιλογών και για τις υπόλοιπες μπάλες. Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα να επιλέξουμε 5 μπάλες οι οποίες βρίσκονται σε διαφορετικές σειρές είναι:

$$\frac{25 \times 20 \times 15 \times 10 \times 5}{\frac{25!}{20!}}.$$



Σχήμα 1: Σχηματική αναπαράσταση για το ερώτημα (α) της άσκησης 3.

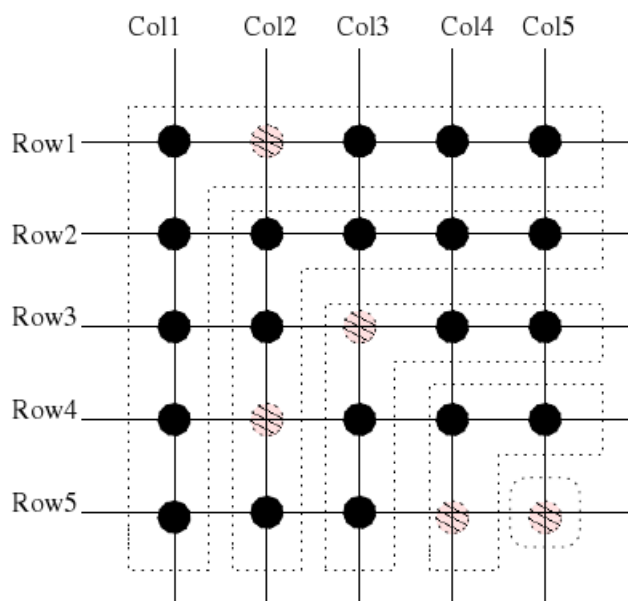
(β) Κοιτάζοντας το 5×5 πλέγμα, υπάρχουν πέντε θέσεις για να επιλέξουμε την πρώτη μπάλα από την πρώτη σειρά. Για την δεύτερη μπάλα υπάρχουν τέσσερις θέσεις στην δεύτερη σειρά από τις οποίες μπορούμε να την επιλέξουμε. Ομοίως για την τρίτη μπάλα, υπάρχουν τρεις πιθανές θέσεις στην τρίτη σειρά και δύο θέσεις από την τέταρτη σειρά για την τέταρτη μπάλα. Τέλος, για την πέμπτη μπάλα υπάρχει μονάχα μια θέση στην πέμπτη σειρά που μπορούμε να την επιλέξουμε. Άρα ο συνολικός αριθμός θέσεων που μπορούμε να επιλέξουμε είναι: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$. Παρατηρήστε ότι υπάρχουν $5!$ τρόποι για να ταξινομήσουμε τις πέντε σειρές. Άρα ο συνολικός αριθμός που μπορούμε να επιλέξουμε πέντε μπάλες έτσι ώστε να βρίσκονται σε διαφορετικές σειρές και διαφορετικές στήλες είναι: $5!5!$. Ο συνολικός αριθμός επιλογών πέντε μπάλες από 25 είναι $\frac{25!}{20!}$, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{5!5!}{\frac{25!}{20!}}.$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να σκεφτούμε το ίδιο πρόβλημα είναι ο ακόλουθος:

Για την πρώτη μπάλα έχουμε 25 πιθανές θέσεις από όπου μπορούμε να την επιλέξουμε. Εμποδίζοντας την σειρά και την στήλη από την οποία την επιλέξαμε, μας απομένουν 16 θέσεις επιλογής για την δεύτερη μπάλα. Ομοίως εμποδίζοντας την σειρά και την στήλη που επιλέξαμε την δεύτερη μπάλα μας μένουν 9 θέσεις επιλογής για την τρίτη μπάλα, για την τέταρτη 4 θέσεις, ενώ για την τελευταία 1 θέση. Άρα το συνολικό πλήθος που μπορούμε να επιλέξουμε τις 5 μπάλες από διαφορετικές σειρές και διαφορετικές στήλες είναι $25 \times 16 \times 9 \times 4 \times 1$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{25 \times 16 \times 9 \times 4 \times 1}{\frac{25!}{20!}}.$$



Σχήμα 2: Σχηματική αναπαράσταση για το ερώτημα (β) της άσκησης 3.

Άσκηση 4.

(α) Υπάρχουν $20!$ διαφορετικοί τρόποι να παρκάρουν τα 20 αυτοκίνητα στις 20 θέσεις, όσες όλες οι δυνατές μεταθέσεις 20 αντικειμένων.

(β) Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα τα γερμανικά αυτοκίνητα να εναλλάσσονται με μη-γερμανικά, πρέπει να απαριθμήσουμε τα ευνοϊκά ενδεχόμενα και να διαιρέσουμε με το νούμερο που βρήκαμε στο (α). Πρώτα διατάσσουμε τα 10 γερμανικά αυτοκίνητα. Υπάρχουν $10!$ τρόποι να γίνει αυτό. Με παρόμοιο τρόπο διατάσσουμε και τα 10 μη-γερμανικά αυτοκίνητα. Επίσης, υπάρχουν $10!$ τρόποι να γίνει αυτό. Στη συνέχεια για κάθε διάταξη της μίας κατηγορίας παρεμβάλλουμε αυτοκίνητα από τη διάταξη της άλλης κατηγορίας. Αυτό μπορεί να γίνει με 2 διαφορετικούς τρόπους καθώς το πρώτο αυτοκίνητο μπορεί να είναι είτε γερμανικό είτε όχι. Συνεπώς έχουμε συνολικά $2 \cdot 10! \cdot 10!$ ευνοϊκές διατάξεις και η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{2 \cdot 10! \cdot 10!}{20!}.$$

Εναλλακτικά: Από τις 20 διαθέσιμες θέσεις πρέπει να επιλέξουμε 10 στις οποίες θα τοποθετήσουμε τα 10 γερμανικά αυτοκίνητα. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{20}{10}$ τρόπους (σκεφτείτε την αναλογία με την ρίψη ενός κέρματος 20 φορές, όπου τοποθετούμε γερμανικό αυτοκίνητο στη θέση παρκαρίσματος όποτε έρχεται Κ). Σε μόνο δύο από αυτές εναλλάσσονται τα αυτοκίνητα ανάλογα με το αν είναι ή όχι γερμανικά. Επομένως η πιθανότητα είναι και πάλι

$$\frac{2}{\binom{20}{10}}.$$

Άσκηση 5. Ας ονομάσουμε τις 4 τάξεις των 25 μαθητών ως Α, Β, Γ και Δ. Η πιθανότητα να βρίσκονται ο Κώστας και η Ελένη μαζί στην τάξη Α ισούται με το λόγο του πλήθους των συνδιασμών για την τάξη Α που περιέχουν τόσο τον Κώστα όσο και την Ελένη προς το συνολικό πλήθος των συνδιασμών:

$$\frac{\binom{98}{23}}{\binom{100}{25}}.$$

Καθώς υπάρχουν 4 τάξεις, η πιθανότητα να βρίσκονται ο Κώστας και η Ελένη μαζί στην ίδια τάξη ισούται με

$$4 \cdot \frac{\binom{98}{23}}{\binom{100}{25}}.$$

Εναλλακτικά (και ακόμα πιο εύκολα): Τοποθετούμε τον Κώστα σε μία τάξη. Για την Ελένη υπάρχουν 99 πιθανές τοποθετήσεις από τις οποίες μόνο οι 24 την βάζουν στην ίδια τάξη με τον Κώστα. Συνεπώς η πιθανότητα είναι $24/99$.

Άσκηση 6. Ορίζουμε τα γεγονότα $A = \{\text{Τα 7 χαρτιά περιέχουν ακριβώς 3 άσσους}\}$ και $B = \{\text{Τα 7 χαρτιά περιέχουν ακριβώς 2 βαλέδες}\}$.

(α) Υπάρχουν $\binom{52}{7}$ τρόποι να επιλέξουμε 7 χαρτιά από μία τράπουλα με 52 χαρτιά. Ας μετρήσουμε πόσοι από αυτούς περιέχουν ακριβώς 3 άσσους: Πρέπει να επιλέξουμε 3 από τους 4 άσσους και οποιαδήποτε 4 από τα υπόλοιπα 48 χαρτιά. Συνολικά αυτό γίνεται με $\binom{4}{3} \binom{48}{4}$ τρόπους. Επομένως,

$$P(A) = \frac{\binom{4}{3} \binom{48}{4}}{\binom{52}{7}}.$$

(β) Με παρόμοιο συλλογισμό,

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2} \binom{48}{5}}{\binom{52}{7}}.$$

(γ) Προφανώς εδώ ζητάμε την πιθανότητα $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Το γεγονός $A \cap B$ (διαλέγουμε ακριβώς 3 άσσους και 2 βαλέδες στα 7 χαρτιά) συμβαίνει με την επιλογή 3 από τους

4 άσσους, 2 από τους 4 βαλέδες και 2 από τα υπόλοιπα 44 χαρτιά. Υπάρχουν $\binom{4}{3}\binom{4}{2}\binom{44}{2}$ τρόποι να γίνει αυτό. Συνεπώς,

$$P(A \cup B) = \frac{\binom{4}{3}\binom{48}{4} + \binom{4}{2}\binom{48}{5} - \binom{4}{3}\binom{4}{2}\binom{44}{2}}{\binom{52}{7}}.$$

Άσκηση 7.

(α) Ορίζουμε την τ.μ. Y ως τον αριθμό των φίλων που έρχονται στη συναυλία μαζί σας και οι οποίοι δεν είναι συμφοιτητές σας στο ΗΥ-217. Προφανώς η τ.μ. Y παίρνει τις τιμές $Y = 0, 1, 2, 3, 4$. Καθώς $X = 10Y$, η τ.μ. X παίρνει τις τιμές $X = 0, 10, 20, 30, 40$.

(β) Επιλέγετε τέσσερις από τους εννιά φίλους σας για να έρθουν μαζί σας και αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{9}{4} = 126$ τρόπους. Από την άλλη, υπάρχουν $\binom{5}{Y}\binom{4}{4-Y}$ τρόποι να επιλέξετε Y φίλους που δεν είναι συμφοιτητές σας στο ΗΥ-217 και $4 - Y$ φίλους που είναι συμφοιτητές σας στο ΗΥ-217 για να έρθουν μαζί σας στη συναυλία. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} p_X(0) &= P(X=0) = P(Y=0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{4}{4}}{126} = \frac{1}{126} \\ p_X(10) &= P(X=10) = P(Y=1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{3}}{126} = \frac{20}{126} \\ p_X(20) &= P(X=20) = P(Y=2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{2}}{126} = \frac{60}{126} \\ p_X(30) &= P(X=30) = P(Y=3) = \frac{\binom{5}{3}\binom{4}{1}}{126} = \frac{40}{126} \\ p_X(40) &= P(X=40) = P(Y=4) = \frac{\binom{5}{4}\binom{4}{0}}{126} = \frac{5}{126} \end{aligned}$$

(...και 0, αλλού!)

(γ) Το μέσο κόστος για όλη την παρέα είναι:

$$E[X] = 0 \frac{1}{126} + 10 \frac{20}{126} + 20 \frac{60}{126} + 30 \frac{40}{126} + 40 \frac{5}{126} = 22.22 \text{ ευρώ.}$$

(δ) Σε αυτή την περίπτωση, έστω $\hat{X}$ η τ.μ. που εκφράζει το νέο κόστος. Προφανώς τώρα ισχύει ότι:

$$\hat{X} = 10Y + z(5 - Y) = X + 5z - \frac{z}{10}X = X(1 - \frac{z}{10}) + 5z.$$

Κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της μέσης τιμής, έχουμε ότι

$$E[\hat{X}] = E[X(1 - \frac{z}{10}) + 5z] = E[X](1 - \frac{z}{10}) + 5z = 22.22(1 - \frac{z}{10}) + 5z.$$