

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2012
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 15/10/2012

Ημερομηνία Παράδοσης: 24/10/2012

Άσκηση 1.

(α) Ορίζουμε τα γεγονότα $H_i = \{\text{η } i\text{-στή ρίψη φέρνει κεφαλή}\}$ και $T_i = \{\text{η } i\text{-στή ρίψη φέρνει γράμματα}\}$, $i = 1, 2, 3$, και $E = \{\text{η Μαρία τρώει το μπισκότο}\}$. Τότε, $E = H_1 \cup (T_1 \cap H_2 \cap H_3)$, όπου προφανώς τα γεγονότα H_1 και $T_1 \cap H_2 \cap H_3$ είναι ξένα μεταξύ τους. Συνεπώς,

$$P(E) = P(H_1) + P(T_1 \cap H_2 \cap H_3) = P(H_1) + P(T_1)P(H_2)P(H_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

(β) Καθώς $H_1 \subset E$, έχουμε ότι $P(E \cap H_1) = P(H_1) = \frac{1}{2}$. Επομένως,

$$P(H_1|E) = \frac{P(E \cap H_1)}{P(E)} = \frac{1/2}{5/8} = \frac{4}{5}.$$

Άσκηση 2.

(α) Ορίζουμε το γεγονός $A = \{\text{το κέρμα με πιθανότητα κεφαλής } 1/3 \text{ ρίχνεται πρώτο}\}$. Προφανώς, $A^c = \{\text{το κέρμα με πιθανότητα κεφαλής } 2/3 \text{ ρίχνεται πρώτο}\}$. Χρησιμοποιώντας αυτή τη διαμέριση του δειγματοχώρου, εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$$P(H_1) = P(A)P(H_1|A) + P(A^c)P(H_1|A^c) = \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

Ομοίως:

$$P(H_2) = P(A)P(H_2|A) + P(A^c)P(H_2|A^c) = \frac{1}{2} \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

(β) Ομοίως, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(H_1 \cap H_2) &= P(A)P(H_1 \cap H_2|A) + P(A^c)P(H_1 \cap H_2|A^c) \\ &= P(A)P(H_1|A)P(H_2|A) + P(A^c)P(H_1|A^c)P(H_2|A^c) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{3} = \frac{2}{9}. \end{aligned} \tag{1}$$

(γ) Από τα (α) και (β) έχουμε ότι $P(H_1 \cap H_2) = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{2} \frac{1}{2} = P(H_1)P(H_2)$. Συνεπώς, τα γεγονότα H_1 και H_2 δεν είναι ανεξάρτητα, αν και είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα δεδομένου του A .

Άσκηση 3. Έστω E το γεγονός ότι μια τυχαία επιλεγμένη έγκυος γυναίκα έχει εξωμήτρια κύηση και S το γεγονός ότι μία τυχαία επιλεγμένη γυναίκα είναι καπνίστρια. Τότε, από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε ότι:

$$P(E|S) = 2P(E|S^c), \text{ και } P(S) = 0.32.$$

Ο κανόνας του Bayes μας δίνει:

$$\begin{aligned} P(S|E) &= P(S \cap E)/P(E) \\ &= \frac{P(E|S)P(S)}{P(E|S)P(S) + P(E|S^c)P(S^c)} \\ &= \frac{2P(S)}{2P(S) + P(S^c)} = 32/66 = 0.4848. \end{aligned}$$

Άσκηση 4. Έστω Ψ το γεγονός κάποιος να ψήφισε, A να είναι ανεξάρτητος, Φ φιλελεύθερος, Σ συντηρητικός.

(α)

$$\begin{aligned} P(A|\Psi) &= \frac{P(\Psi|A)P(A)}{P(\Psi|A)P(A) + P(\Psi|\Phi)P(\Phi) + P(\Psi|\Sigma)P(\Sigma)} \\ &= \frac{0.35 * 0.46}{0.35 * 0.46 + 0.62 * 0.3 + 0.58 * 0.24} = 0.331 \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} P(\Phi|\Psi) &= \frac{P(\Psi|\Phi)P(\Phi)}{P(\Psi|A)P(A) + P(\Psi|\Phi)P(\Phi) + P(\Psi|\Sigma)P(\Sigma)} \\ &= \frac{0.62 * 0.30}{0.35 * 0.46 + 0.62 * 0.3 + 0.58 * 0.24} = 0.383 \end{aligned}$$

(γ)

$$\begin{aligned} P(\Sigma|\Psi) &= \frac{P(\Psi|\Sigma)P(\Sigma)}{P(\Psi|A)P(A) + P(\Psi|\Phi)P(\Phi) + P(\Psi|\Sigma)P(\Sigma)} \\ &= \frac{0.58 * 0.24}{0.35 * 0.46 + 0.62 * 0.3 + 0.58 * 0.24} = 0.286 \end{aligned}$$

(δ)

$$P(\Psi) = P(\Psi|A)P(A) + P(\Psi|\Phi)P(\Phi) + P(\Psi|\Sigma)P(\Sigma) = 0.4862.$$

Άσκηση 5. Έστω G το γεγονός κάποιος να είναι καλός οδηγός, M να είναι μέτριος και B κακός. Αν A το γεγονός κάποιος να είχε ατύχημα, τότε

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|G)P(G) + P(A|M)P(M) + P(A|B)P(B) \\ &= (0.05) * (0.2) + (0.15)(0.5) + (0.3)(0.3) = 0.175 \end{aligned}$$

(α)

$$P(G|A^c) = \frac{P(A^c|G)P(G)}{P(A^c)} = \frac{0.95 * 0.2}{0.825} = 0.23.$$

(β)

$$P(M|A^c) = \frac{P(A^c|M)P(M)}{P(A^c)} = \frac{0.85 * 0.5}{0.825} = 0.51.$$

Άσκηση 6. Βοηθά σε αυτή την άσκηση να γίνει το δενδρικό διάγραμμα του πειράματος. Έστω A το γεγονός ότι χρειάζεται να γίνει δεύτερος γύρος και B το γεγονός ότι ο Κώστας είναι νικητής του πρώτου γύρου. Έστω C το γεγονός ότι ο Αντώνης είναι πρωταθλητής ξανά, D το γεγονός ότι η Μαρία είναι νικήτρια του πρώτου γύρου και E το γεγονός να έγινε μόνο ένας αγώνας στο δεύτερο γύρο. Τότε οι ζητούμενες πιθανότητες είναι:

$$(ai) P(A) = 0.6^2 + 0.4^2 = 0.52.$$

$$(aii) P(B) = 0.6^2 = 0.36.$$

$$(aiii) P(C) = 1 - 0.6^2 \cdot 0.5^2 - 0.4^2 \cdot 0.3^2 = 0.8956.$$

$$(βi) P(B|A) = \frac{0.6^2}{0.52} = \frac{0.36}{0.52} = 0.6923 \text{ (διότι } B \subset A \text{)}.$$

(βii)

$$\begin{aligned} P(C|A) &= P(C|B, A) \cdot P(B|A) + P(C|D, A) \cdot P(D|A) \\ &= (1 - 0.5^2) \cdot 0.6923 + (1 - 0.3^2) \cdot 0.3077 \\ &= 0.7992 \end{aligned}$$

(γi)

$$\begin{aligned} P(B|A \cap E) &= \frac{0.6^2 \cdot 0.5^2}{0.6^2 \cdot 0.5 + 0.4^2 \cdot 0.7} \\ &= \frac{0.6^2 \cdot 0.5}{0.2920} \\ &= 0.6164 \end{aligned}$$

Άσκηση 7.

(α) Καθώς τα A και B είναι ανεξάρτητα, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Επίσης, αφού το B είναι υποσύνολο του A , $P(A \cap B) = P(B)$. Επομένως, $P(B) = P(A)P(B)$, και συνεπώς $P(B) = 0$ ή $P(A) = 1$.

(β) Ο δειγματοχώρος αυτού του πειράματος τύχης είναι

$$\Omega = \{KKK, KKT, KTK, KTG, ΓKK, ΓKT, ΓTK, ΓTG\}.$$

Το γεγονός A είναι:

$$A = \{KTT, ΓKT, ΓTK, ΓTG\},$$

με $P(A) = \frac{4}{8}$, ενώ το B είναι:

$$B = \{KKT, KTK, KTG, ΓKK, ΓKT, ΓTK\},$$

με $P(B) = \frac{6}{8}$. Η τομή των A και B είναι το γεγονός "ακριβώς μία κεφαλή":

$$A \cap B = \{KTT, ΓKT, ΓTK\},$$

με $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$. Καθώς $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα.

(γ) Σε αυτή την περίπτωση μπορείτε να παρατηρήσετε ότι $B \subset A$ καθώς το A περιέχει όλα τα δειγματοσημεία του B συν το $ΓΓΓΓ$. Αν τα A και B ήταν και ανεξάρτητα τότε από το (α) θα έπρεπε είτε $P(B) = 0$ ή $P(A) = 1$. Αλλά προφανώς $P(B) > 0$ (π.χ. το B περιέχει το απλό ενδεχόμενο KTT) και $P(A) < 1$ (το A δεν περιέχει το ενδεχόμενο $ΓKKK$). Επομένως, τα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.