

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2012
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 1/10/2012

Ημερομηνία Παράδοσης: 10/10/2012

Άσκηση 1. (α) $S = \{(r, r), (r, g), (r, b), (g, r), (g, g), (g, b), (b, r), (b, g), (b, b)\}$
(β) $S = \{(r, g), (r, b), (g, r), (g, b), (b, r), (b, g)\}$

Άσκηση 2. Από τις δοθείσες τιμές $P(ABC) = 0.01, P(AB) = 0.08, P(BC) = 0.04, P(AC) = 0.02$ βρίσκουμε εύκολα ότι $P(ABC^c) = 0.08 - 0.01 = 0.07, P(A^cBC) = 0.04 - 0.01 = 0.03, P(AB^cC) = 0.02 - 0.01 = 0.01$

Στη συνέχεια, αφού $P(A) = 0.1 = P(ABC) + P(ABC^c) + P(AB^cC) + P(AB^cC^c)$, έχουμε ότι $P(AB^cC^c) = 0.01$.

Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι $P(A^cBC^c) = 0.19$ και $P(A^cB^cC) = 0$. Τελικά έχουμε $P(A \cup B \cup C) = P(ABC) + P(ABC^c) + P(A^cBC) + P(AB^cC) + P(AB^cC^c) + P(A^cBC^c) + P(A^cB^cC) = 0.32$.

Έλεγχος: Η πρόταση 4.4 δίνει $P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$ το οποίο είναι επίσης 0.32. Τελικά, $P(A^cB^cC^c) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 0.68$.

Αν E το ενδεχόμενο κάποιος να διαβάζει μόνο μια εφημερίδα, F το ενδεχόμενο κάποιος να διαβάζει τουλάχιστον 2 εφημερίδες, G το ενδεχόμενο κάποιος να διαβάζει τουλάχιστον μία πρωινή καθώς επίσης και την απογευματινή και H να μην είναι αναγνώστης καμίας εφημερίδας, τότε οι πιθανότητες που ζητούνται είναι:

$$(α) P(E) = P(AB^cC^c) + P(A^cBC^c) + P(A^cB^cC) = 0.01 + 0.19 + 0 = 0.2$$

$$(β) P(F) = P(AB \cup BC \cup AC) = P(ABC) + P(ABC^c) + P(A^cBC) + P(AB^cC) = 0.01 + 0.07 + 0.03 + 0.01 = 0.12. \text{ Έλεγχος: } P(AB \cup BC \cup AC) = P(AB) + P(BC) + P(AC) - 2P(ABC)$$

$$(γ) P(G) = P(B \cap (A \cup C)) = P(AB) + P(BC) - P(ABC) = 0.08 + 0.04 - 0.01 = 0.11$$

$$(δ) P(H) = P(A^cB^cC^c) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 0.68.$$

Άσκηση 3. Έστω G το γεγονός ότι ο επιλεγμένος μαθητής είναι διάνοια, και C το γεγονός ότι ο επιλεγμένος μαθητής είναι ΑΕΚτζής. Μας δίδεται ότι: $P(G) = 0.6, P(C) = 0.7, P(G^c \cap C^c) = 0.25$. Άρα θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(G \cup C) &= P(G) + P(C) - P(G \cap C) = 1 - P(G^c \cap C^c) \\ &\Rightarrow 0.6 + 0.7 - P(G \cap C) = 1 - 0.25 \\ &\Rightarrow P(G \cap C) = 0.55 \end{aligned}$$

Εφόσον $P(G) = P(G \cap C^c) + P(G \cap C)$, θα ισχύει ότι:

$$P(G \cap C^c) = P(G) - P(G \cap C) = 0.6 - 0.55 = 0.05$$

Με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε ότι:

$$P(C \cap G^c) = P(C) - P(G \cap C) = 0.7 - 0.55 = 0.15$$

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$\begin{aligned} P((G \cap C^c) \cup (C \cap G^c)) &= P(G \cap C^c) + P(C \cap G^c) - P((G \cap C^c) \cap (C \cap G^c)) \\ &= P(G \cap C^c) + P(C \cap G^c) = 0.05 + 0.15 = \boxed{0.2} \end{aligned}$$

Άσκηση 4. Έστω A το γεγονός ότι θα βρέξει σήμερα και B το γεγονός ότι θα βρέξει αύριο. Το γεγονός ότι θα βρέξει και σήμερα και αύριο μπορεί να εκφραστεί ως η τομή των γεγονότων A και B δηλαδή $A \cap B$. Επιπλέον, το γεγονός ότι θα βρέξει είτε σήμερα είτε αύριο είναι η ένωση των γεγονότων A και B δηλαδή $A \cup B$. Ένα από τα Αξιώματα των Πιθανοτήτων είναι και το ακόλουθο:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Παρατηρούμε ότι: $P(A \cup B) = 0.3 + 0.5 - 0.2 = 0.6$, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την πιθανότητα 0.7 που έχει δοθεί από τον εκφωνητή για το ίδιο γεγονός $A \cup B$ (μέρος (δ) της εκφώνησης).

Άσκηση 5. Πρώτα, προσδιορίζουμε τις πιθανότητες των έξι πιθανών αποτελεσμάτων. Έστω $a = P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\})$ και $b = P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\})$. Μας δίδεται ότι: $b = 3a$. Σύμφωνα με τα Αξιώματα της Προσθετικότητας (additivity) και της Κανονικοποίησης (normalization), θα έχουμε ότι: $1 = 3a + 3b = 3a + 9a = 12a$. Επομένως, θα είναι: $a = 1/12$, $b = 3/12$ και η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με: $P(\{4, 5, 6\}) = 3/12 + 1/12 + 3/12 = 7/12$.

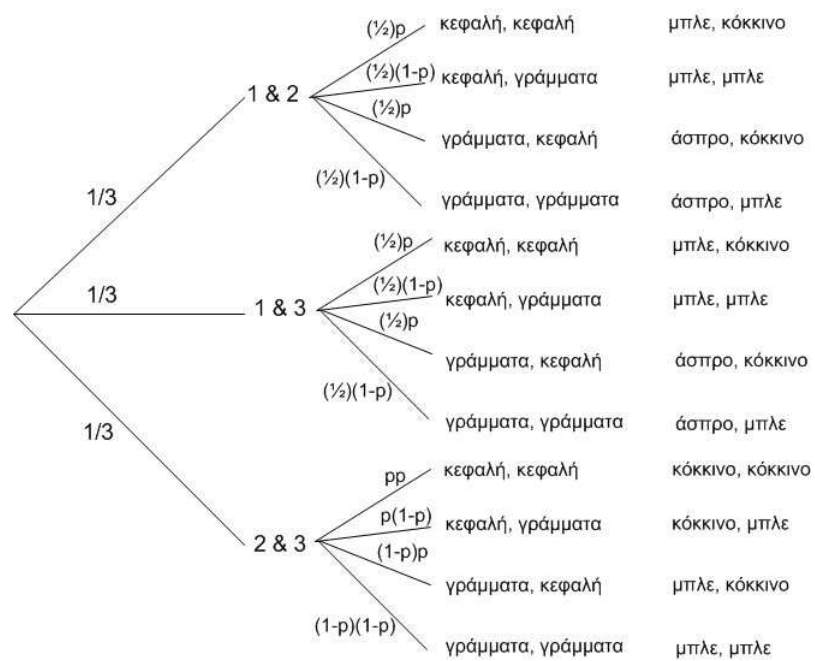
Άσκηση 6. (α) Το πείραμα θεωρούμε ότι γίνεται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση γίνεται η επιλογή των δύο κερμάτων, ενώ στη δεύτερη φάση γίνεται το ρίξιμο αυτών. Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει η επιλογή δύο κερμάτων από ένα σύνολο τριών: επιλέγουμε το πρώτο και το δεύτερο ή το πρώτο και το τρίτο ή το δεύτερο και το τρίτο. Καθένα από αυτά τα ζευγάρια έχει την ίδια πιθανότητα επιλογής. Επίσης, για κάθε ζευγάρι κερμάτων υπάρχουν τα εξής ενδεχόμενα ρίψεων: (κεφαλή, κεφαλή), (κεφαλή, γράμματα), (γράμματα, κεφαλή), (γράμματα, γράμματα). Άρα, ο δειγματοχώρος μπορεί να περιγραφεί με τον τρόπο που φαίνεται στο Σχήμα ::

(β) Η πιθανότητα και οι δύο πλευρές που έρχονται μετά τη ρίψη των δύο κερμάτων να είναι βαμμένες με το ίδιο χρώμα είναι:

$$\begin{aligned} P(\text{πλευρές με ίδιο χρώμα}) &= P((\text{μπλε}, \text{μπλε})) + P((\text{κόκκινο}, \text{κόκκινο})) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2}(1-p) + \frac{1}{2}(1-p) + p^2 + (1-p)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{3}(2p^2 - 3p + 2) \end{aligned}$$

Όμως, $P(\text{πλευρές με ίδιο χρώμα}) = 29/96$.

Λύνοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση $(1/3)(2p^2 - 3p + 2) = 29/96$, βρίσκουμε ότι $p = 5/8$ ή $p = 7/8$.



Σχήμα 1: Δενδρική αναπαράσταση Άσκησης 6(α).