

**Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών**  
**Θεωρία Πιθανοτήτων - Πρόοδος**  
**Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**  
**26 Νοεμβρίου 2011 - Διάρκεια: 2.5 Ώρες**

**Θέμα 1 - 20 μονάδες.**

Η Σοφία περνά μπροστά από ένα κουτί που περιέχει δύο ειδών σοκολάτες: ION γάλακτος και ION αμυγδάλου. Στο κουτί υπάρχουν τρεις φορές περισσότερες ION γάλακτος από ION αμυγδάλου. Η Σοφία επιλέγει μία σοκολάτα στην τύχη. Αν επιλέξει μία ION γάλακτος, την τρώει με πιθανότητα  $1/5$ . Αν επιλέξει μία ION αμυγδάλου, την τρώει με πιθανότητα  $2/5$ .

(α) Με ποια πιθανότητα η Σοφία τρώει τη σοκολάτα που επέλεξε;

(β) Δεδομένου ότι η Σοφία έφαγε τη σοκολάτα, ποια είναι η πιθανότητα ότι αυτή ήταν μία ION αμυγδάλου;

**Θέμα 2 - 25 μονάδες.**

Ένα σώμα 3 δικαστών πρέπει να πάρει μία απόφαση *υπέρ* ή *κατά*. Η απόφαση παίρνεται κατά πλειοψηφία. Κάθε δικαστής ψηφίζει, μυστικά και ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους, *υπέρ* με πιθανότητα  $p$ . Ορίζουμε το γεγονός  $M$  ότι η απόφαση του σώματος είναι *υπέρ* (δηλαδή, η πλειοψηφία των δικαστών ψήφισε *υπέρ*), και το γεγονός  $A$  ότι ο πρώτος δικαστής ψήφισε *υπέρ*.

(α) Τι κατανομή ακολουθεί η τ.μ.  $X$ , ο αριθμός των δικαστών που ψηφίζει *υπέρ*; Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός των δικαστών που ψηφίζουν *υπέρ*;

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα  $P(M)$ .

(γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα  $P(M/A)$ .

(δ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα  $P(A/M)$ . Δώστε τη γραφική παράσταση της  $P(A/M)$  ως συνάρτηση του  $p$ . Ποια είναι τα όρια της  $P(A/M)$  καθώς  $p \rightarrow 0$  και  $p \rightarrow 1$ . Με δύο προτάσεις σχολιάστε αυτά τα όρια.

**Θέμα 3 - 20 μονάδες.**

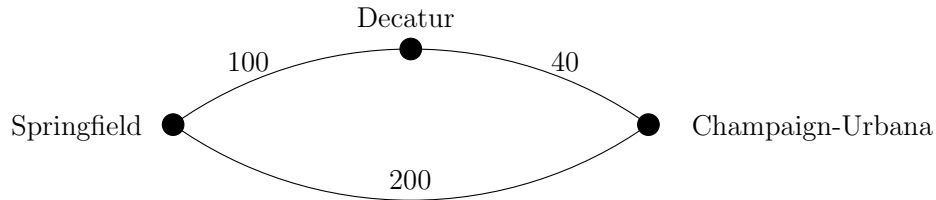
Ρίχνουμε δύο δίκαια *τριέδρα* ζάρια. Ορίζουμε τη τ.μ.  $X$  ως το άθροισμα των δύο ρίψεων.

(α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας,  $p_X(x)$ , τη μέση τιμή,  $E[X]$ , και τη διασπορά,  $var(X)$ , της τ.μ.  $X$ .

(β) Σε ένα παιχνίδι τύχης, πληρώνετε  $a$  ευρώ για το δικαίωμα να ρίξετε μία φορά τα ζάρια κερδίζοντας  $5X$  ευρώ. Ποια τιμή για το  $a$  καθιστά αυτό το παιχνίδι *δίκαιο*, δηλαδή ένα παιχνίδι στο οποίο κατά μέσο όρο παίρνετε πίσω ότι πληρώσατε;

**Θέμα 4 - 25 μονάδες.**

Θεωρείστε το δίκτυο στο Σχήμα 1, όπου οι αριθμοί στις ακμές μεταξύ του Springfield και της Champaign-Urbana δηλώνουν τη χωρητικότητα της αντίστοιχης σύνδεσης (μετρημένη σε πακέτα). Όπως βλέπουμε, ένα μήνυμα μπορεί να μεταδοθεί είτε απ' ευθείας είτε μέσω Decatur. Κάθε μία από τις 3 συνδέσεις λειτουργεί με πιθανότητα  $p = 1/2$  ανεξάρτητα από τις άλλες.



Σχήμα 1: Περιγραφή δικτύου του θέματος 4.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ένα μήνυμα μπορεί να αποσταλεί επιτυχώς από το Springfield στην Champaign-Urbana.

(β) Ορίστε την τ.μ.  $X$  ως τη χωρητικότητα της τηλεπικοινωνιακής ζεύξης, με άλλα λόγια ως το πλήθος των πακέτων που μπορούν να σταλούν από την πηγή στον προορισμό. Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της  $X$ .

(γ) Υπολογίστε τη μέση τιμή της  $X$ .

**Θέμα 5 - 20 μονάδες.**

(α) Υπολογίστε το  $E[X^2]$  για μία Poisson τ.μ. με μέση τιμή ίση με 5.

(β) Αν  $Y$  είναι Γεωμετρική τ.μ. με μέση τιμή 4, υπολογίστε το  $\text{var}(2 - 3Y)$ .

(γ) Η τ.μ.  $Z$  δηλώνει τον αριθμό των εμφανίσεων ενός γεγονότος  $A$  (με πιθανότητα εμφάνισης  $p$ ) σε 10 ανεξάρτητες δοκιμές. Ποια είναι η *δεσμευμένη* μέση τιμή της τ.μ.  $Z$  *δεδομένου* ότι τι γεγονός  $A$  εμφανίστηκε 4 φορές στις *πρώτες* 6 δοκιμές;