

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Εξεταστική Σεπτεμβρίου
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

3/9/2012

Άσκηση 1.

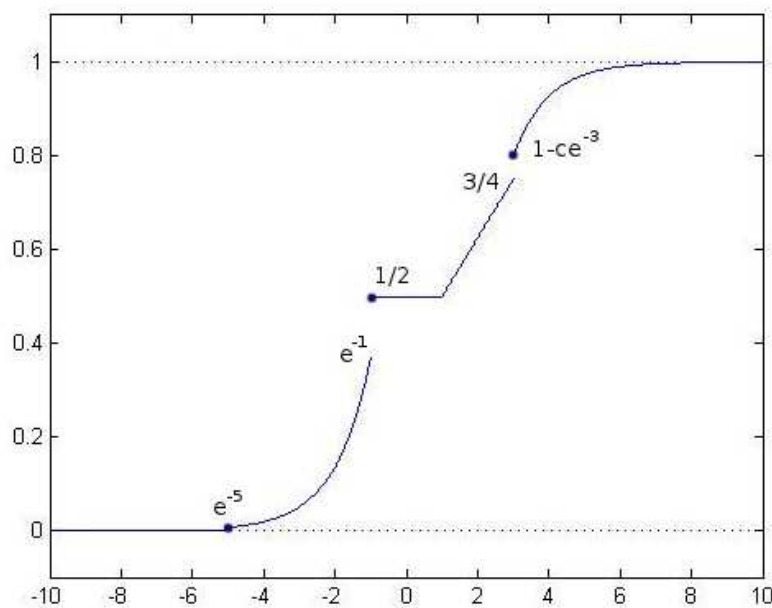
(α) Η ΑΣΚ $F_X(x)$ είναι συνάρτηση συνεχής από τα δεξιά. Συνεπώς, $\alpha = F_X(-5) = F_X(-5^+) = e^{-5} \Rightarrow \alpha = e^{-5}$. Επίσης, $b = F_X(-1) = F_X(-1^+) = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 1/2$. Επίσης, η ΑΣΚ $F_X(x)$ είναι μία αύξουσα συνάρτηση, επομένως:

$$\frac{1}{8}3 + \frac{3}{8} = \frac{3}{4} = F_X(3^-) \leq F_X(3) = 1 - ce^{-3} \Rightarrow ce^{-3} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow c \leq \frac{e^3}{4}.$$

Τέλος, η ΑΣΚ είναι άνω φραγμένη από το 1: $F_X(x) \leq 1 \Rightarrow 1 - ce^{-x} \leq 1 \Rightarrow ce^{-x} \geq 0$ για $x \geq 3 \Rightarrow c \geq 0$.

Συνεπώς, $\alpha = e^{-5}$, $b = 0.5$ και $0 \leq c \leq \frac{e^3}{4}$.

(β) Η γραφική παράσταση της $F_X(x)$ φαίνεται στο σχήμα:



Διαβάζοντας το σχήμα έχουμε ότι:

(γ-i) $P(X = -5) = F_X(-5) - F_X(-5^-) = e^{-5} - 0 = e^{-5} = 0.0067$.

(γ-ii) $P(X = -2) = F_X(-2) - F_X(-2^-) = e^{-2} - e^{-2} = 0$.

(γ-iii) $P(X \leq -5) = F_X(-5) = e^{-5}$.

(γ-iv) $P(X \geq -1) = 1 - P(X < -1) = 1 - F_X(-1^-) = 1 - e^{-1} = 0.6321$.

(γ-v) $P(X = 3) = F_X(3) - F_X(3^-) = 1 - ce^{-3} - (\frac{1}{8}3 + \frac{3}{8}) = \frac{1}{4} - ce^{-3}$.

(γ-vi) Η X είναι μία μικτή τ.μ.

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} e^x & , -5 < x < -1 \\ \frac{1}{8} & , 1 \leq x < 3 \\ ce^{-x} & , x > 3 \\ e^{-5}\delta(x+5) & \\ (\frac{1}{2} - e^{-1})\delta(x+1) & \\ (\frac{1}{4} - ce^{-3})\delta(x-3) & \end{cases}$$

Άσκηση 2.**(α)** $X \sim U[2, 5]$ επομένως,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , 2 \leq x \leq 5 \\ 0 & , \text{αλλού.} \end{cases}$$

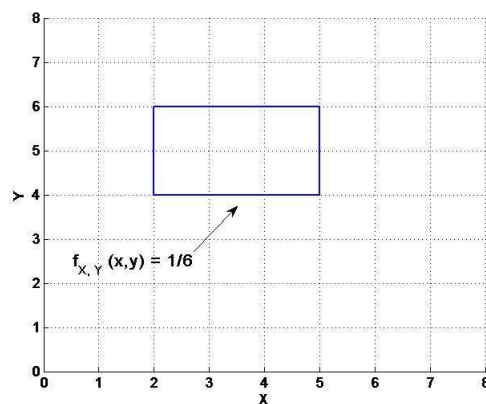
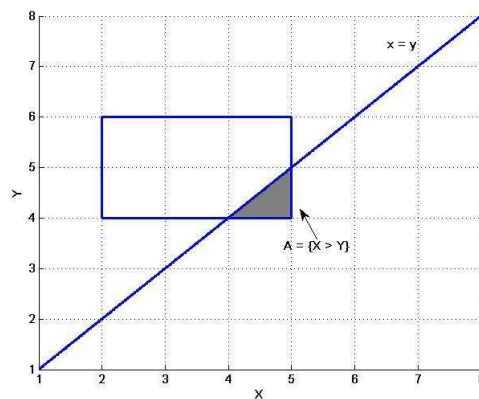
 $Y \sim U[4, 6]$ επομένως,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , 4 \leq y \leq 6 \\ 0 & , \text{αλλού.} \end{cases}$$

Καθώς οι X και Y είναι ανεξάρτητες τ.μ.,

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6} & , 2 \leq x \leq 5 \text{ και } 4 \leq y \leq 6 \\ 0 & , \text{αλλού.} \end{cases}$$

Δηλαδή, οι X και Y ακολουθούν μια από κοινού ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $\{2 \leq x \leq 5, 4 \leq y \leq 6\}$ με γραφική παράσταση:

**(β)** $P(A) = P(X > Y)$ 

Από το σχήμα, είναι προφανές ότι $P(X > Y) = \frac{1}{6}$. $E_{X>Y} = \frac{1}{6} \times 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

(γ) Το πλήθος των αγώνων, W , που κερδίζει ο Νίκος σε 6 προσπάθειες ακολουθεί Διωνυμική κατανομή: $W \sim \Delta(n = 6, p = 1/12)$. Συνεπώς $P(W = 4) = \binom{6}{4} \left(\frac{1}{12}\right)^4 \left(\frac{11}{12}\right)^2$.

(δ) Το πλήθος των αγώνων έως τη πρώτη νίκη του Κώστα ακολουθεί Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p = 11/12$. Η μέση τιμή της Γεωμετρικής τ.μ. είναι $1/p = 12/11$.

Άσκηση 3.

(α) Όταν $B = 1$, προφανώς $Z = X$. Επομένως, $P(Z \geq 4|B = 1) = P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - P(\frac{X-2}{2} \leq \frac{4-2}{2}) = 1 - \Phi(1)$.

(β) $P(Z = 4|B = 1) = 0$ διότι η τ.μ. Z είναι συνεχής.

(γ) Όταν $B = 0$, προφανώς $Z = Y$. Επομένως, $P(Z \leq 4|B = 0) = P(Y \leq 4) = P(\frac{Y-7}{3} \leq \frac{4-7}{3}) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$.

(δ) Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:

$$\begin{aligned} P(Z \geq 4) &= P(Z \geq 4|B = 0) \cdot P(B = 0) + P(Z \geq 4|B = 1) \cdot P(B = 1) \\ &= P(Y \geq 4) \cdot \frac{1}{3} + P(X \geq 4) \cdot \frac{2}{3} \\ &= P(\frac{Y-7}{3} \geq \frac{4-7}{3}) \cdot \frac{1}{3} + P(\frac{X-2}{2} \geq \frac{4-2}{2}) \cdot \frac{2}{3} \\ &= (1 - \Phi(-1)) \frac{1}{3} + (1 - \Phi(1)) \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}\Phi(1) + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\Phi(1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\Phi(1). \end{aligned}$$

Άσκηση 4.

(α) $X \sim \exp(\lambda)$, $E[X] = 1/\lambda$, $\text{var}(X) = 1/\lambda^2$, $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Συνεπώς $E[X^2] = E^2[X] + \text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$.

(β)

$$\begin{aligned} P(\lfloor X^2 \rfloor = 3) &= P(3 \leq X^2 < 4) = P(\sqrt{3} \leq X < 2) \\ &= \int_{\sqrt{3}}^2 f_X(x) dx = F_X(2) - F_X(\sqrt{3}) = e^{-\sqrt{3}\lambda} - e^{-2\lambda}. \end{aligned}$$

(γ) Η τ.μ. Y παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, 1]$.

Για $0 < y \leq 1$:

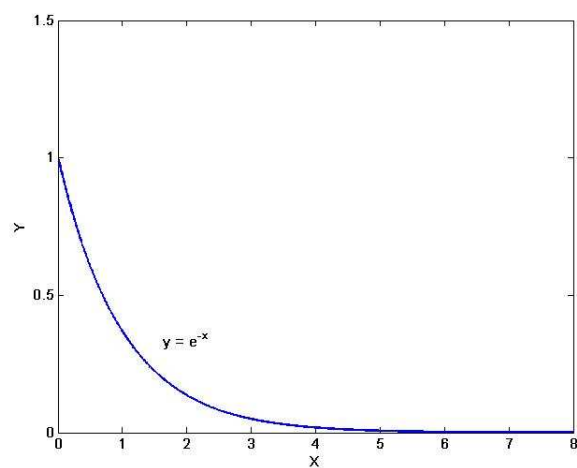
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^{-X} \leq y) = P(-X \leq \ln y) = P(X \geq -\ln y) = 1 - F_X(-\ln y) = e^{\lambda \ln y} = y^\lambda.$$

Για $y \leq 0$, $F_Y(y) = 0$.

Για $y \geq 1$, $F_Y(y) = 1$.

Συνεπώς,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y \leq 0 \\ y^\lambda & , 0 < y \leq 1 \\ 1 & , y \geq 1. \end{cases}$$



(δ) $f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \lambda y^{\lambda-1}, 0 < y \leq 1.$

