

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
3 Σεπτεμβρίου 2012 - Διάρκεια: 3 Ώρες

Θέμα 1 - 25 μονάδες. Βασικές έννοιες συνεχών τ.μ.

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(x)$ της τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) X έχει την εξής έκφραση:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -5 \\ \alpha, & x = -5 \\ e^x, & -5 < x < -1 \\ b, & x = -1 \\ \frac{1}{2}, & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{8}x + \frac{3}{8}, & 1 \leq x < 3 \\ 1 - ce^{-x}, & x \geq 3 \end{cases}$$

(α) (8 μονάδες) Για ποιες τιμές των σταθερών α , b και c είναι η $F_X(x)$ μία έγκυρη αθροιστική συνάρτηση κατανομής;

(β) (5 μονάδες) Δώστε τη γραφική παράσταση της $F_X(x)$.

(γ) (12 μονάδες) Υπολογίστε τα ακόλουθα:

(γ-i) (2 μονάδες) $P(X = -5)$.

(γ-ii) (2 μονάδες) $P(X = -2)$.

(γ-iii) (2 μονάδες) $P(X \leq -5)$.

(γ-iv) (2 μονάδες) $P(X \geq -1)$.

(γ-v) (2 μονάδες) $P(X = 3)$.

(γ-vi) (2 μονάδες) Κατανομή, $f_X(x)$, της X . Τι είδους μεταβλητή είναι η X ;

Θέμα 2 - 30 μονάδες. Πράξεις με συνεχείς τ.μ.

Ο Κώστας και ο Νίκος συναγωνίζονται σε αγώνες δρόμου. Οι χρόνοι τους είναι οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X και Y , αντίστοιχα, που ακολουθούν ομοιόμορφες κατανομές. Οι χρόνοι του Κώστα (οι τιμές της τ.μ. X) μεταβάλλονται στο διάστημα $[2, 5]$ ενώ οι χρόνοι του Νίκου (οι τιμές της τ.μ. Y) μεταβάλλονται στο διάστημα $[4, 6]$.

(α) (10 μονάδες) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, $f_{X,Y}(x,y)$, των τ.μ. X και Y .

(β) (10 μονάδες) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(A)$, να κερδίσει τον αγώνα ο Νίκος.

(γ) (5 μονάδες) Υπολογίστε την πιθανότητα με την οποία ο Νίκος κερδίζει ακριβώς 4 στους 6 αγώνες. Υποθέστε ότι το αποτέλεσμα κάθε αγώνα είναι ανεξάρτητο από αυτά των υπολοίπων.

(δ) (5 μονάδες) Υπολογίστε το μέσο πλήθος αγώνων που απαιτούνται έως την πρώτη νίκη του Κώστα.

Θέμα 3 - 20 μονάδες. Κανονική κατανομή.

Έστω οι τρεις ανεξάρτητες τ.μ. X , Y , και B . Οι τ.μ. X και Y είναι Γκαουσιανές με μέσες τιμές $\mu_X = 2$ και $\mu_Y = 7$, και διασπορές $\sigma_X^2 = 4$ και $\sigma_Y^2 = 9$, αντίστοιχα. Δηλαδή, $X \sim N(2, 4)$ και $Y \sim N(7, 9)$. Η τ.μ. B είναι Bernoulli με παράμετρο $p = \frac{2}{3}$. Έστω η νέα τ.μ.

$$Z = XB + Y(1 - B).$$

Εκφράστε τις ακόλουθες πιθανότητες συναρτήσει των τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(\cdot)$.

(α) (5 μονάδες) $P(Z \geq 4 | B = 1)$.

(β) (5 μονάδες) $P(Z = 4 | B = 1)$.

(γ) (5 μονάδες) $P(Z \leq 4 | B = 0)$.

(δ) (5 μονάδες) $P(Z \geq 4)$.

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Συναρτήσεις τ.μ.

Η τ.μ. X είναι εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο $\lambda > 0$. Υπολογίστε τα ακόλουθα συναρτήσει του λ .

(α) (5 μονάδες) $E[X^2]$.

(β) (5 μονάδες) $P(\lfloor X^2 \rfloor = 3)$, όπου $\lfloor u \rfloor$ είναι το ακέραιο μέρος του u .

(γ) (10 μονάδες) Ορίζουμε την τ.μ. $Y = e^{-X}$. Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Y(y)$, της Y .

(δ) (5 μονάδες) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, $f_Y(y)$, της Y .