

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Θεωρία Πιθανοτήτων
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τελικής Εξέτασης - 23 Ιανουαρίου 2012

Θέμα 1.

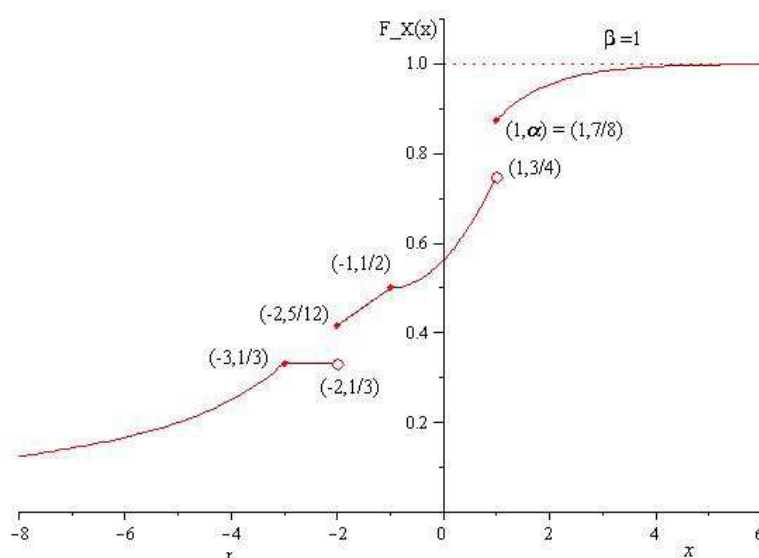
(α) Από τις ιδιότητες της α.σ.κ. $F_X(x)$ έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\beta - \frac{1}{8} e^{-(x-1)} \right) = 1 \Rightarrow \beta = 1.$$

Επίσης, η $F_X(x)$ είναι συνεχής από δεξιά:

$$\alpha = F_X(1) = F_X(1^+) = 1 - \frac{1}{8} e^{-(1-1)} \Rightarrow \alpha = \frac{7}{8}.$$

(β) Η γραφική παράσταση της $F_X(x)$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



(γ) Όπως βλέπουμε στη γραφική παράσταση της $F_X(x)$, αυτή έχει τμήματα στα οποία είναι συνεχής αλλά έχει και δύο σημεία ασυνέχειας, τα $x = -2$ και $x = 1$. Επομένως, η τ.μ. X είναι μικτή. Παίρνει δε τις τιμές -2 και 1 με μη μηδενικές πιθανότητες:

$$P(X = -2) = F_X(-2^+) - F_X(-2^-) = \frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12} = 0.0833.$$

και

$$P(X = 1) = F_X(1^+) - F_X(1^-) = \frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

$$(δ) P(X < -3) = F_X(-3^-) = \frac{1}{3}.$$

$$(ε) P(X = -2) = F_X(-2) - F_X(-2^-) = \frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

$$(στ) P(|X| < 1) = P(-1 < X < 1) = F_X(1^-) - F_X(-1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Θέμα 2.

(α) Ορίζουμε το γεγονός $S = \{\text{μεταδίδεται σήμα}\}$, με $P(S) = 0.75$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, έχουμε:

$$f_X(x) = P(S) \cdot f_{X|S}(x) + P(S^c) \cdot f_{X|S^c}(x).$$

Μας δίνεται ότι $X|S \sim U[0, 3]$ ενώ $X|S^c \sim U[-2, 2]$.

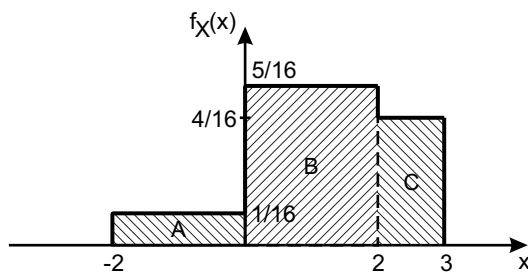
Δηλαδή,

$$f_{X|S}(x) = \begin{cases} 1/3, & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$f_{X|S^c}(x) = \begin{cases} 1/4, & -2 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Συνεπώς,

$$f_X(x) = \frac{3}{4}f_{X|S}(x) + \frac{1}{4}f_{X|S^c}(x) = \begin{cases} 1/16, & -2 \leq x \leq 0 \\ 5/16, & 0 < x \leq 2 \\ 4/16, & 2 < x \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



Όπως φαίνεται στο σχήμα, η σ.π.π. της X είναι κατά τμήματα σταθερή.

(β) Εφαρμόζουμε το ΘΟΜΤ:

$$E[X] = P(A)E[X|A] + P(B)E[X|B] + P(C)E[X|C],$$

$$\text{όπου } P(A) = \frac{2}{16}, \quad P(B) = \frac{10}{16}, \quad P(C) = \frac{4}{16}.$$

$$E[X|A] = \frac{-2+0}{2} = -1, \quad E[X|B] = \frac{0+2}{2} = 1, \quad E[X|C] = \frac{2+3}{2} = 2.5,$$

$$E[X^2|A] = \frac{(-2)^2 - 2 \cdot 0 + 0^2}{3} = \frac{4}{3}, \quad E[X^2|B] = \frac{0^2 + 0 \cdot 2 + 2^2}{3} = \frac{4}{3}, \quad E[X^2|C] = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3^2}{3} = \frac{25}{3}.$$

Συνεπώς,

$$E[X] = \frac{2}{16} \cdot (-1) + \frac{10}{16} \cdot 1 + \frac{4}{16} \cdot \frac{5}{2} = \frac{9}{8} = 1.125.$$

$$E[X^2] = \frac{2}{16} \cdot \frac{4}{3} + \frac{10}{16} \cdot \frac{4}{3} + \frac{4}{16} \cdot \frac{25}{3} = 3.0833.$$

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 3.0833 - 1.125^2 = 1.8177.$$

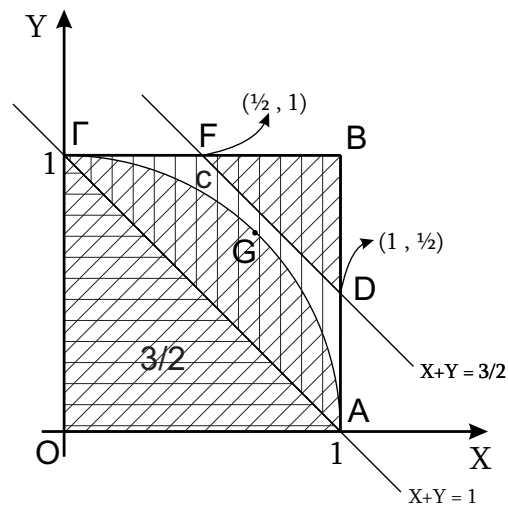
(γ) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes:

$$P(S|X = 1.5) = \frac{P(S) \cdot f_{X|S}(1.5)}{f_X(1.5)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{16}} = \frac{4}{5} = 0.8.$$

Θέμα 3.

(α) Οι τ.μ. X, Y παίρνουν τιμές στο γραμμοσκιασμένο τετράγωνο του σχήματος. Από τη σχέση κανονικοποίησης προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}E_{OAG} + cE_{ABG} &= 1 \Rightarrow \\ \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + c \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 &= 1 \Rightarrow \\ c &= \frac{1}{2} = 0.5. \end{aligned}$$



(β) Η τ.μ. Y παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 1)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx = \int_0^{1-y} \frac{3}{2} dx + \int_{1-y}^1 \frac{1}{2} dx \\ &= \frac{3}{2}x \Big|_0^{1-y} + \frac{1}{2}x \Big|_{1-y}^1 = \frac{3(1-y) + 1 - (1-y)}{2} = \frac{3}{2} - y \end{aligned}$$

Επομένως,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3/2 - y, & 0 \leq y < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$(γ) P(X + Y \geq 3/2) = \frac{1}{2}E_{DBF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$$

$$(δ) P(X^2 + Y^2 \leq 1) = \frac{3}{2}E_{OAG} + \frac{1}{2}E_{AGΓ} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{\pi \cdot 1^2}{4} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right] = 0.8927.$$

Θέμα 4.

(α-i) $P(Z = \alpha) = 0, \forall \alpha.$

(α-ii)

$$\begin{aligned}
 P(|Z - 3| \geq 1.5) &= P(Z \geq 4.5 \cup Z \leq 1.5) \\
 &= P(Z \geq 4.5) + P(Z \leq 1.5) \\
 &= 1 - P\left(\frac{Z - (-4)}{3} \leq \frac{4.5 - (-4)}{3}\right) + P\left(\frac{Z - (-4)}{3} \leq \frac{1.5 - (-4)}{3}\right) \\
 &= 1 - \Phi\left(\frac{8.5}{3}\right) + \Phi\left(\frac{5.5}{3}\right).
 \end{aligned}$$

(α-iii)

$$\begin{aligned}
 P(Z^2 \leq 16) &= P(-4 \leq Z \leq 4) \\
 &= P\left(\frac{-4 - (-4)}{3} \leq \frac{Z - (-4)}{3} \leq \frac{4 - (-4)}{3}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{8}{3}\right) - \Phi(0) \\
 &= \Phi\left(\frac{8}{3}\right) - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

(β-i) $E[W] = E[X + 2Y + 3] = E[X] + 2E[Y] + 3 = 2 + 2 \cdot 4 + 3 = 13.$

$$\begin{aligned}
 var(W) &= var(X + 2Y + 3) = var(X + 2Y) = var(X) + var(2Y) + 2cov(X, 2Y) \\
 &= var(X) + 4var(Y) + 2 \cdot 2cov(X, Y) \\
 &= var(X) + 4var(Y) + 4\rho_{X,Y} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y \\
 &= 9 + 4 \cdot 25 + 4 \cdot 0.2 \cdot 3 \cdot 5 = 121.
 \end{aligned}$$

(β-ii) Συσχέτιση:

$$\begin{aligned}
 E[XW] &= E[X(X + 2Y + 3)] \\
 &= E[X^2] + 2E[XY] + 3E[X] \\
 &= var(X) + (E[X])^2 + 2(cov(X, Y) + E[X]E[Y]) + 3E[X] \\
 &= 9 + 2^2 + 2(0.2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4) + 3 \cdot 2 = 41.
 \end{aligned}$$

(γ-i) $\mu_S = E[S] = \frac{1}{2}E[X_1] + \frac{1}{2}E[X_2] = \mu$

$$\begin{aligned}
 \sigma_S^2 &= var(S) = var\left(\frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{2}\right) = var\left(\frac{X_1}{2}\right) + var\left(\frac{X_2}{2}\right) + 2cov\left(\frac{X_1}{2}, \frac{X_2}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{4}var(X_1) + \frac{1}{4}var(X_2) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \rho_{X_1, X_2} \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2} \\
 &= \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{2} \rho_{X_1, X_2} \cdot \sigma^2 \\
 &= \frac{1}{2}(1 + \rho_{X_1, X_2}) \cdot \sigma^2
 \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$SNR_S = \frac{\mu_S^2}{\sigma_S^2} = \frac{2}{1 + \rho_{X_1, X_2}} \cdot \frac{\mu^2}{\sigma^2} = \frac{2}{1 + \rho_{X_1, X_2}} \cdot SNR_X$$

Όταν οι X_1 και X_2 είναι ασυσχέτιστες, $\rho_{X_1, X_2} = 0$ και συνεπώς $SNR_S = 2SNR_X$.

(γ-ii) Έχουμε ότι $\frac{2}{1 + \rho_{X_1, X_2}} = 1.5 \Rightarrow \rho_{X_1, X_2} = \frac{1}{3}$.

(γ-iii) Παρατηρούμε ότι καθώς $\rho_{X_1, X_2} \rightarrow -1$ τότε $SNR_S \rightarrow +\infty$. Δηλαδή, αν οι δύο μετρήσεις είναι ισχυρά αρνητικά συσχετισμένες, ο μέσος όρος τους έχει άπειρο SNR .

Θέμα 5.

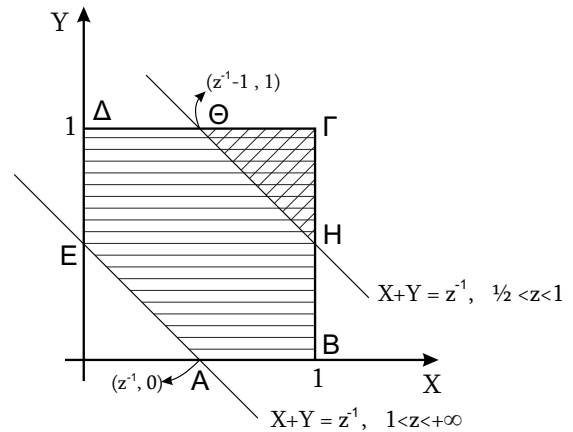
(α) Αφού οι X, Y είναι ανεξάρτητες,

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Έχουν δηλαδή από κοινού ομοιόμορφη κατανομή.

(β) Το πεδίο τιμών της τ.μ. Z είναι το $[\frac{1}{2}, +\infty)$.

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P\left(\frac{1}{X+Y} \leq z\right) \\ &= P(X+Y \geq z^{-1}) \\ &= \begin{cases} 0, & z < 1/2 \\ 1 \cdot E_{H\Gamma\Theta}, & 1/2 \leq z \leq 1 \\ 1 \cdot E_{AB\Gamma\Delta E}, & 1 < z < +\infty \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & z < 1/2 \\ \frac{(2 - z^{-1})^2}{2}, & 1/2 \leq z \leq 1 \\ 1 - \frac{z^{-2}}{2}, & 1 < z < +\infty \end{cases} \end{aligned}$$



(γ)

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \begin{cases} 2z^{-2} - z^{-3}, & 1/2 \leq z \leq 1 \\ z^{-3}, & 1 < z < +\infty \end{cases}$$