

**Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών**  
**Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση**  
**Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**  
**23 Ιανουαρίου 2012 - Διάρκεια: 3 Ώρες**

**Θέμα 1 - 20 μονάδες.** Η τυχαία μεταβλητή  $X$  έχει αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.):

$$F_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x \in (-\infty, -3] \\ \frac{1}{3} & x \in (-3, -2) \\ \frac{1}{12}x + \frac{7}{12} & x \in [-2, -1] \\ \frac{1}{16}(x+1)^2 + \frac{1}{2} & x \in (-1, 1) \\ \alpha & x = 1 \\ \beta - \frac{1}{8}e^{-(x-1)} & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

όπου  $\alpha$  και  $\beta$  είναι σταθερές.

**(α) (5 μονάδες)** Υπολογίστε τις σταθερές  $\alpha$  και  $\beta$  οι οποίες καθιστούν την  $F_X(x)$  μία έγκυρη α.σ.κ.

**(β) (4 μονάδες)** Δώστε τη γραφική παράσταση της  $F_X(x)$ .

**(γ) (2 μονάδες)** Τι είδους τ.μ. είναι η  $X$  (διακριτή, συνεχής, μεικτή); Γιατί;

**(δ) (3 μονάδες)** Ποια είναι η πιθανότητα  $P(X < -3)$ ;

**(ε) (3 μονάδες)** Ποια είναι η πιθανότητα  $P(X = -2)$ ;

**(στ) (3 μονάδες)** Ποια είναι η πιθανότητα  $P(|X| < 1)$ ;

**Θέμα 2 - 15 μονάδες.**

Η τάση που λαμβάνει ένας δέκτης μοντελοποιείται ως μία τ.μ.  $X$ . Όταν δεν μεταδίδεται σήμα, η τάση ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ -2 και 2 Volts. Όταν μεταδίδεται σήμα, η τάση ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ 0 και +3 Volts. Υποθέτουμε ότι το σήμα μεταδίδεται με πιθανότητα 0.75.

**(α) (5 μονάδες)** Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ.  $X$ .

**(β) (5 μονάδες)** Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τάσης στο δέκτη,  $E[X]$  και  $var(X)$ , αντίστοιχα.

**(γ) (5 μονάδες)** Δεδομένου ότι η τάση στο δέκτη είναι 1.5 Volts, υπολογίστε την πιθανότητα ότι μεταδόθηκε σήμα.

**Θέμα 3 - 20 μονάδες.**

Οι συνεχείς τ.μ.  $X$  και  $Y$  έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.):

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 3/2 & 0 \leq x < 1, \quad 0 \leq y < 1, \quad 0 \leq x+y < 1, \\ c & 0 \leq x < 1, \quad 0 \leq y < 1, \quad 1 \leq x+y < 2, \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

**(α) (5 μονάδες)** Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π. και υπολογίστε τη σταθερά  $c$ .

**(β) (5 μονάδες)** Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π.π. της τ.μ.  $Y$ .

**(γ) (5 μονάδες)** Υπολογίστε την πιθανότητα  $P(X+Y \geq 3/2)$ .

**(δ) (5 μονάδες)** Υπολογίστε την πιθανότητα  $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$ .

**Θέμα 4 - 25 μονάδες.**

**(α) (5 μονάδες)** Η τ.μ.  $Z$  ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή  $-4$  και διασπορά  $9$ ,  $Z \sim N(-4, 9)$ . Υπολογίστε τις ακόλουθες πιθανότητες: (i)  $P(Z = a)$  για κάποιο  $a \in (0, 1)$ , (ii)  $P(|Z - 3| \geq 1.5)$ , (iii)  $P(Z^2 < 16)$ . Εκφράστε τις απαντήσεις σας με βάση τιμές της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής.

**(β) (5 μονάδες)** Οι τ.μ.  $X$  και  $Y$  είναι από κοινού Γκαουσιανές με μέσες τιμές  $E[X] = 2$ ,  $E[Y] = 4$ , διασπορές  $\text{var}(X) = 9$ ,  $\text{var}(Y) = 25$ , και συντελεστή συσχέτισης  $\rho_{X,Y} = 0.2$ . Ορίζουμε την τ.μ.  $W = X + 2Y + 3$ . Υπολογίστε: (i)  $E[W]$  και  $\text{var}(W)$ , (ii) τη συσχέτιση των  $X$  και  $W$ ,  $E[XW]$ .

**(γ) (15 μονάδες)** Οι τ.μ.  $X_1$  και  $X_2$  μοντελοποιούν τις παρατηρήσεις ενός σήματος υπό την παρουσία θορύβου, όπως μετρούνται από δύο αισθητήρες ενός ασυρμάτου δικτύου αισθητήρων. Οι  $X_1$  και  $X_2$  έχουν την ίδια μέση τιμή,  $\mu$ , και διασπορά,  $\sigma^2$ . Η σηματοθορυβική σχέση ( $SNR$ ) κάθε παρατήρησης (της  $X_1$  ή της  $X_2$ ) ορίζεται ως ο λόγος  $SNR_X = \frac{\mu^2}{\sigma^2}$ . Ένας μηχανικός συστημάτων επιλέγει να βελτιώσει την ποιότητα των δεδομένων παίρνοντας το μέσο όρο των δύο μετρήσεων:  $S = \frac{X_1 + X_2}{2}$ .

**(γ-i) (5 μονάδες)** Εκφράστε το  $SNR_S = \frac{\mu_S^2}{\sigma_S^2}$  της τ.μ.  $S$  ως συνάρτηση του  $SNR_X$  και του συντελεστή συσχέτισης  $\rho_{X_1, X_2}$  μεταξύ των τ.μ.  $X_1$  και  $X_2$ . Δείξτε ότι το  $SNR_S$  είναι διπλάσιο από αυτό των παρατηρήσεων, όταν οι  $X_1$  και  $X_2$  είναι ασυχέτιστες μεταξύ τους.

**(γ-ii) (5 μονάδες)** Ο μηχανικός παρατηρεί ότι  $SNR_S = 1.5 SNR_X$ . Σωστά συμπεραίνει ότι οι παρατηρήσεις  $X_1$  και  $X_2$  είναι συσχετισμένες. Υπολογίστε την τιμή του συντελεστή συσχέτισης  $\rho_{X_1, X_2}$ .

**(γ-iii) (5 μονάδες)** Για ποιά τιμή του  $\rho_{X_1, X_2}$  μπορεί η διαδικασία του μέσου όρου να κάνει το  $SNR_S$  αυθαίρετα υψηλό (να το απειρίσει);

**Θέμα 5 - 20 μονάδες.**

Οι ανεξάρτητες συνεχείς τ.μ.  $X$  και  $Y$  ακολουθούν καθεμιά ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $(0, 1)$ . Ορίζουμε την τ.μ.  $Z = \frac{1}{X+Y}$ .

**(α) (5 μονάδες)** Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π. των  $X$  και  $Y$ .

**(β) (10 μονάδες)** Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της  $Z$ ,  $F_Z(z)$ .

**(γ) (5 μονάδες)** Υπολογίστε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $Z$ ,  $f_Z(z)$ .