

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2011
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Έκτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 21/12/2011

Ημερομηνία Παράδοσης: 11/01/2012

Άσκηση 1.

(α)

$$P(\text{Ο Χρήστος κερδίζει}) = 1 - P(\text{Ο Χρήστος χάνει}) = 1 - P(X > Y) = 1 - \int_2^3 \int_2^x \frac{1}{4} dy dx = \frac{7}{8}.$$

(β) Το πλήθος των αγώνων που κερδίζει ο Χρήστος στο σύνολο 10 αγώνων είναι μια απλή διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο 10 και με πιθανότητα αυτή που υπολογίστηκε στο ερώτημα (α). Έχουμε λοιπόν:

$$P(\text{Ο Χρήστος νικά σε 7 από τους 10 αγώνες}) = \binom{10}{7} \left(\frac{7}{8}\right)^7 \left(\frac{1}{8}\right)^3$$

(γ) Εφόσον ο αγώνας είναι αγώνας ταχύτητας, ο νικητής έχει τον μικρότερο χρόνο. Άρα η κατανομή του χρόνου για τον νικητή του αγώνα είναι: $W = \min(X, Y)$. Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο, χρειάζεται αρχικά να υπολογίσουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της W :

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(\min(X, Y) \leq w) \\ &= 1 - P(\min(X, Y) > w) \\ &= 1 - P(X > w, Y > w) \\ &= \begin{cases} 0 & , w \leq 1, \\ 1 - 1/2(3 - w) & , 1 < w \leq 2 \\ 1 - 1/4(12 - 7w + w^2) & , 2 < w \leq 3 \\ 1 & , w > 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση πιθανότητας της W μπορεί να παραχθεί από την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , 1 < x \leq 2, \\ \frac{7}{4} - \frac{w}{2} & , 2 < w \leq 3 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άσκηση 2.

(α) Εφόσον οι X και Y είναι ανεξάρτητες, η από κοινού συνάρτηση πιθανοτήτων είναι:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ορίζουμε το γεγονός R_1 όταν $X \leq 0.25$ και το γεγονός R_2 όταν $Y \leq 0.25$. Ένα μήνυμα έχει ληφθεί εντός 15 λεπτών από τον B , αν ο A έστειλε δυο μηνύματα και τουλάχιστον ένα από τα R_1 και R_2 συνέβει. Η ζητούμενη πιθανότητα που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι η εξής:

$$P(R_1 \cup R_2) = P(R_1) + P(R_2) - P(R_1 \cap R_2)$$

Υπολογίζουμε κάθε όρο ξεχωριστά :

$$P(R_1) = P\left(X \leq \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$P(R_2) = P\left(Y \leq \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

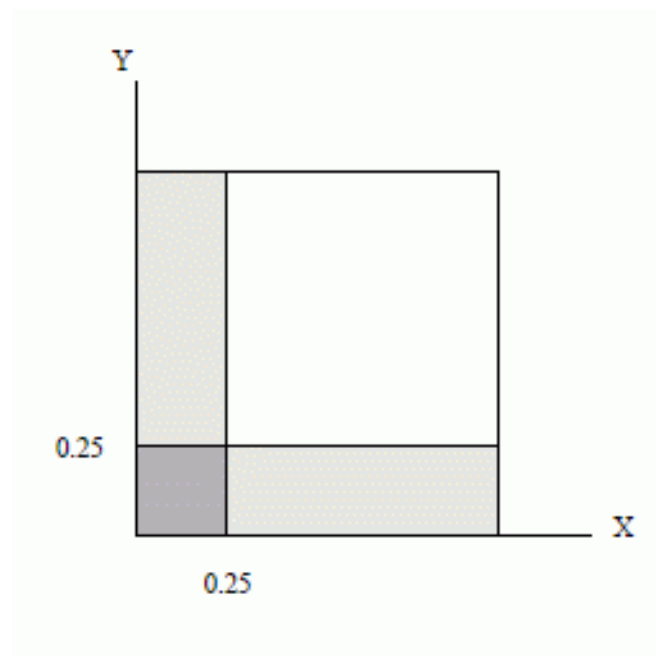
Εφόσον τα X και Y είναι ανεξάρτητα :

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$1/4 + 1/4 - 1/16 = 7/16$$

Να σημειωθεί ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι η συνολική γραμμοσκιασμένη περιοχή στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Άσκηση 2, ερώτημα α.

(β) Έστω B το γεγονός ότι ένα μήνυμα λαμβάνεται εντός 15 λεπτών, αλλά δεν επιβεβαιώνεται. Τότε :

$$B = R_1 \cap R_2^c \cap R_1^c \cap R_2.$$

Παρατηρήστε ότι αυτή είναι η ένωση δυο ξένων μεταξύ τους γεγονότων, οπότε :

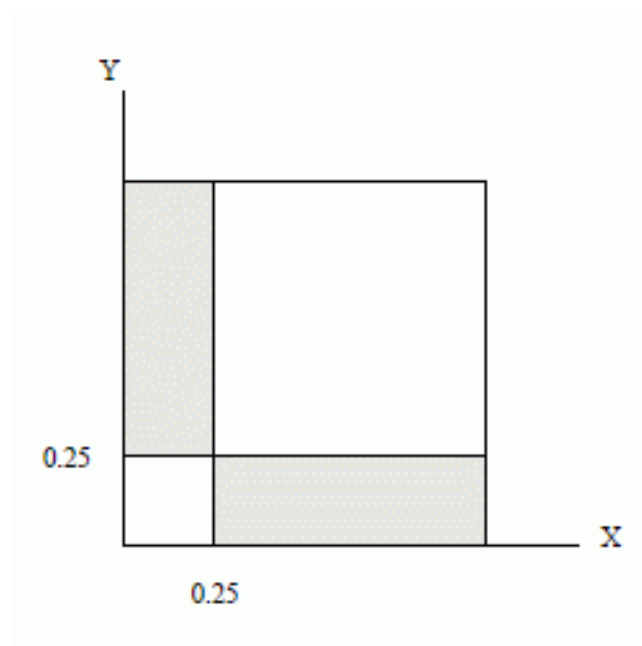
$$P(B) = P(R_1 \cap R_2^c) + P(R_1^c \cap R_2).$$

και η ανεξαρτησία των R_1 και R_2 ακολουθεί την απλοποίηση

$$P(B) = P(R_1) \cdot P(R_2^c) + P(R_1^c) \cdot P(R_2).$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$(1/4)(3/4) + (3/4)(1/4) = \frac{3}{8c}.$$



Σχήμα 2: Άσκηση 2, ερώτημα β.

Να σημειωθεί ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι η συνολική γραμμοσκιασμένη περιοχή στο σχήμα 2.

(γ) Επαλήθευση ενός μηνύματος συμβαίνει όταν και το δεύτερο μήνυμα λαμβάνεται από τον σταθμό B, άρα για $t \in [0, 1]$ έχουμε:

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(X \leq t \cap Y \leq t)$$

εφόσον τα X και Y είναι ανεξάρτητα, μπορούμε να το γράψουμε και ως εξής:

$$P(X \leq t)P(Y \leq t) = t \times t = t^2$$

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & , \infty < t \leq 0, \\ t^2 & , 0 < t \leq 1 \\ 1 & , 1 < t < \infty \end{cases}$$

Οπότε:

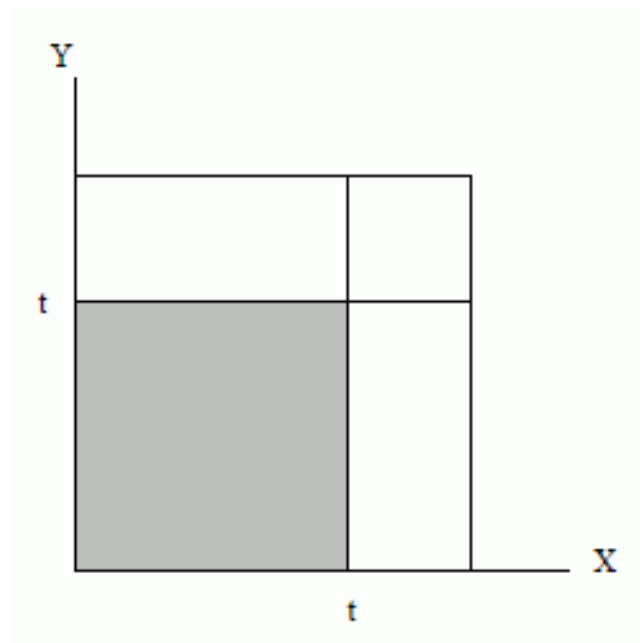
$$f_T(t) = \begin{cases} 2t & , 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Στο σχήμα 3 η γραμμοσκιασμένη επιφάνεια είναι η ζητούμενη πιθανότητα.

(δ) Το γεγονός ότι ο υπάλληλος δε θα βρίσκεται παρών για να λάβει την επαλήθευση είναι $\{|X - Y| > \frac{1}{4}\}$. Μπορούμε να εξαγάγουμε την ζητούμενη πιθανότητα εύκολα από το σχήμα 4.

(ε) Γνωρίζουμε ότι η στρατηγική από το ερώτημα (δ) έχει πιθανότητα επαλήθευσης $9/16$. Η άλλη στρατηγική να στέλνουμε τον υπάλληλο σπίτι του μετά από 45 λεπτά έχει πιθανότητα επιβεβαίωσης $P(T \leq \frac{3}{4}) = \frac{9}{16}$, υπολογίζοντας την έκφραση στο ερώτημα (γ). Συνεπώς, και οι δυο στρατηγικές είναι εξίσου αποτελεσματικές.

Άσκηση 3. Για $x < 0$, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι 0, και για $x > 2$ είναι 1. Για τιμές του x μεταξύ 0 και 2, μπορούμε να βρούμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής χρησιμοποιώντας



Σχήμα 3: Άσκηση 2, ερώτημα γ.

το θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= P(X \leq x) = P(X \leq x, H) + P(X \leq x, T) \\
 &= 1/2(P(X \leq x|H) + P(X \leq x|T)) \\
 &= 1/2(P(U \leq x-1) + P(U \geq x-1)) \\
 &= \begin{cases} 1/2(1 - (1-x)) & , 0 \leq x \leq 1, \\ 1/2(x-1) & , 1 < x \leq 2 \end{cases} \\
 &= \frac{1}{2} \text{ για } 0 \leq x \leq 2
 \end{aligned}$$

Οπότε, $X \sim U[0, 2]$, δηλαδή η X κατανέμεται ομοιόμορφα μεταξύ 0 και 2.

Άσκηση 4.

(α) Αν $k < 0$, τότε $p_Y(k) = 0$. Αν $k \geq 0$, τότε:

$$\begin{aligned}
 p_Y(k) &= P(Y = k) = P(k \leq X < k+1) \\
 &= F_X(k+1) - F_X(k) \\
 &= (1 - e^{-\lambda(k+1)}) - (1 - e^{-\lambda k})e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} \\
 &= e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda})
 \end{aligned}$$

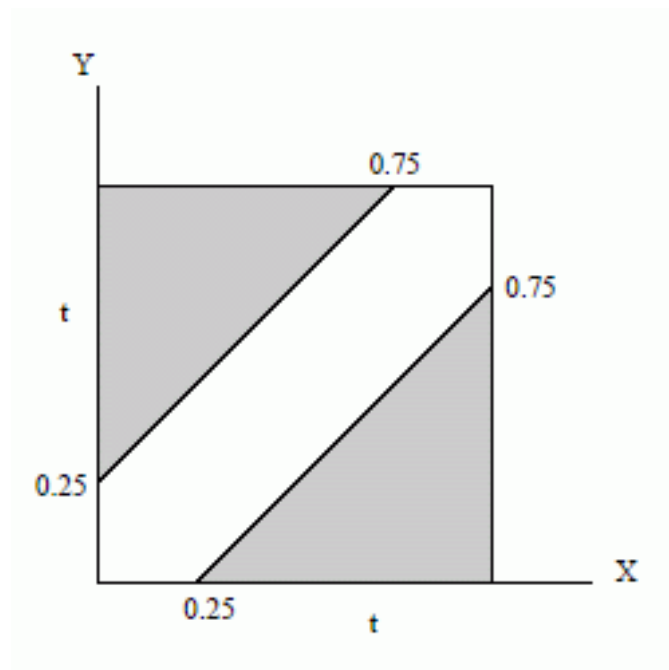
Με άλλα λόγια, Y η κβαντοποίηση της εκθετικής τυχαίας μεταβλητής X , είναι μια γεωμετρική τυχαία μεταβλητή X , ($e^{-\lambda}$), όπου $e^{-\lambda}$ είναι η πιθανότητα επιτυχίας μέσα σε μια μονάδα χρόνου.

(β) Εφόσον για μια συνεχή τυχαία μεταβλητή η πιθανότητα για οποιοδήποτε σημείο είναι 0,

$$P(X < x) = P(X \leq x) = F_X(x).$$

Τώρα, εφόσον:

$$0 \leq Z = X - Y = X - \lfloor X \rfloor < 1$$



Σχήμα 4: Άσκηση 2, ερώτημα δ.

το σφάλμα κβάντισης της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της $f_Z(z)$ είναι 0 αν $z < 0$ ή $z \geq 1$. Αν $0 \leq z < 1$, τότε:

$$\begin{aligned}
 F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(0 \leq Z \leq z) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P(k \leq X \leq k+z) \\
 &= (1 - e^{-\lambda z}) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k} \\
 &= \frac{1 - e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}}
 \end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$f_Z(z) = \frac{\lambda e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}}, \quad 0 \leq z < 1$$

Άσκηση 5.

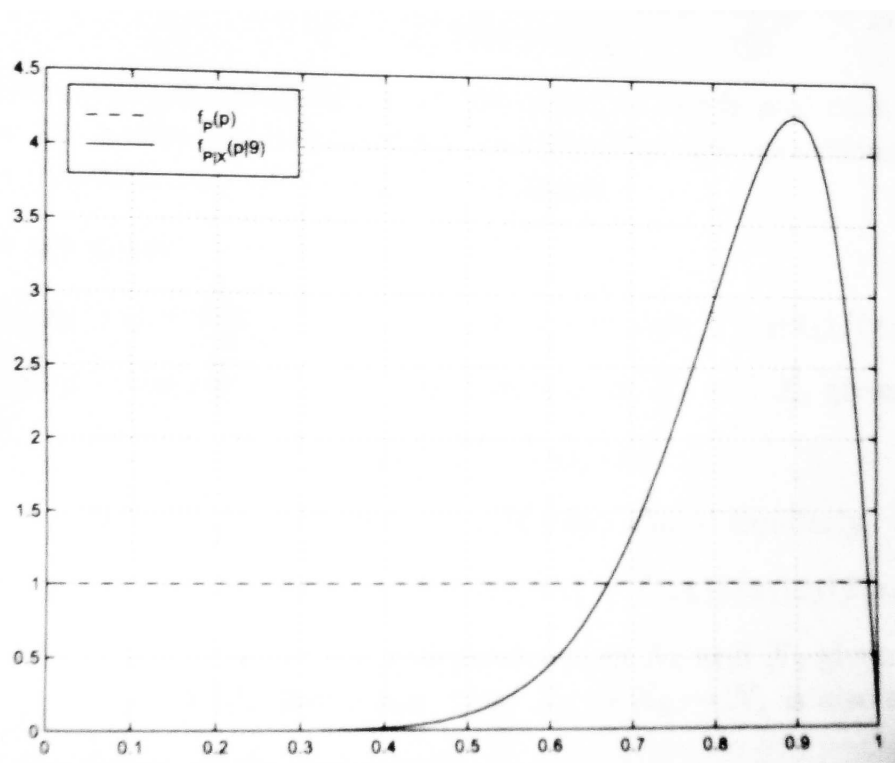
(α) Για να υπολογίσουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της P , εφαρμόζουμε τον κανόνα του Bayes για μείξη τυχαίων μεταβλητών:

$$f_{P|X}(p|x) = \frac{p_{X|P}(x|p)}{\int_0^1 p_{X|P} f_P(p) dp} f_P(p)$$

Τώρα δεδομένου ότι $X = 9$, έχουμε:

$$f_{P|X}(p|9) = \frac{p^9(1-p)}{\int_0^1 p^9(1-p) dp} = \frac{p^9(1-p)}{1/110} = 110p^9(1-p)$$

Το σχήμα 5 δείχνει τη μη δεσμευμένη και δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας της P . Δεδομένης της πληροφορίας ότι 10 ρίψεις έφεραν ως αποτέλεσμα 9 κεφάλες, η συνάρτηση



Σχήμα 5: Άσκηση 5.

πυκνότητα πιθανότητας ολισθαίνει προς την τιμή 0.9. Στην πραγματικότητα, η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας είναι $p = 0.9$. Η δεσμευμένη μέση τιμή είναι $5/6$, άρα η ελάχιστη μέση τετραγωνική εκτίμηση της P δεδομένου $X = 9$ είναι $5/6 = 8.333 < 0.9$.

(β) Έστω ότι το αποτέλεσμα της i -οστής ρίψης είναι μια τυχαία μεταβλητή Y_i , όπου $Y_i = 0$ αντιστοιχεί σε κεφαλή και $Y_i = 1$ αντιστοιχεί σε γράμματα. Η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας της Y_i δεδομένου του $P = p$ είναι

$$P_{Y_i|P}(y_i|p) = \begin{cases} p & , y_i = 0, \\ 1 - p & , y_i = 1 \end{cases}$$

Οι ρίψεις του νομίσματος είναι ανεξάρτητες δεδομένου της πιθανότητας, άρα:

$$p_{Y_1, \dots, Y_{10}|P}(y_1, \dots, y_{10}|p) = p_{Y_1|P}(y_1|p)p_{Y_2|P}(y_2|p) \dots p_{Y_{10}|P}(y_{10}|p)$$

Για να είναι τα αποτελέσματα των ρίψεων 9 κεφαλές που ακολουθεί μια φορά γράμματα, τότε:

$$p_{Y_1, \dots, Y_{10}|P}(H, H, \dots, H, T|p) = p^9(1 - p)$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes για να υπολογίσουμε την δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας της P , έχουμε

$$f_{P|Y_1, \dots, Y_{10}}(p|H, H, \dots, H, T) = \frac{p_{Y_1, \dots, Y_{10}|P}(H, H, \dots, H, T|p)}{p_{Y_1, \dots, Y_{10}}(H, H, \dots, H, T)} f_P(p).$$

Η έκφραση αυτή είναι μηδέν όταν $p < 0$ ή $p > 1$ εφόσον η a priori συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_P(p)$ είναι μηδέν. Για $0 \leq p \leq 1$

$$f_{P|Y_1, \dots, Y_{10}}(p|H, H, \dots, H, T) = \frac{p^9(1 - p)}{\int_0^1 f_{Y_1, \dots, Y_{10}|P}(H, H, \dots, H, T|p) f_P(p) dp}$$

$$= \frac{p^9(1-p)}{\int_0^1 p^9(1-p)dp} = 100p^9(1-p).$$

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από την σειρά των κεφαλών και γραμμάτων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες και κατά επέκταση η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας της Y_i δεδομένου του P είναι συνάρτηση μόνο για το πλήθος των κεφαλών.