

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2011
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 21/12/2011

Ημερομηνία Παράδοσης: 11/01/2012

Θέματα: Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές (III).

Άσκηση 1. Ο Χρήστος και ο Ανδρέας συναγωνίζονται σε έναν αγώνα ταχύτητας. Οι χρόνοι του Χρήστου και του Ανδρέα μοντελοποιούνται σύμφωνα με τις τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) X και Y , αντίστοιχα, οι οποίες ακολουθούν τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.):

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{αν } 1 < x < 3, \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0.5 & \text{αν } 2 < y < 4, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- (α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο Χρήστος κερδίζει τον αγώνα.
(β) Υπολογίστε ότι ο Χρήστος κερδίζει ακριβώς 7 στους 10 αγώνες. Υποθέστε ότι όλοι οι αγώνες είναι μεταξύ τους ανεξάρτητοι.
(γ) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. της τ.μ. W , που ορίζεται ως ο χρόνος του νικητή ενός αγώνα. Πρώτα υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της W .

Άσκηση 2. Δύο σταθμοί Α και Β συνδέονται μεταξύ τους με δύο *παράλληλα* κανάλια επικοινωνίας 1 και 2. Στέλνουμε συγχρόνως μέσω και των δύο καναλιών ένα μήνυμα από το σταθμό Α στο σταθμό Β. Οι τ.μ. X και Y μοντελοποιούν την χρονική καθυστέρηση (σε ώρες) παραλαβής του μηνύματος μέσω των καναλιών 1 και 2, αντίστοιχα. Οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ομοιόμορφα κατανομημένες στο διάστημα $[0, 1]$. Ένα μήνυμα θεωρείται ότι έχει ληφθεί όταν φτάνει στο σταθμό Β μέσω οποιουδήποτε από τα δύο κανάλια, ενώ θεωρείται ότι έχει επαληθευθεί όταν φτάνει στο σταθμό Β μέσω και των δύο καναλιών.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι το μήνυμα έχει ληφθεί εντός 15 λεπτών της ώρας μετά την αποστολή του;
(β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι το μήνυμα έχει ληφθεί αλλά όχι επαληθευθεί εντός 15 λεπτών της ώρας μετά την αποστολή του;
(γ) Έστω η τ.μ. T η οποία μοντελοποιεί το χρόνο (σε ώρες) από την αποστολή του μηνύματος από το σταθμό Α μέχρι την επαλήθευσή του στο σταθμό Β. Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.μ. T και κατόπιν τη σ.π.π. της T .
(δ) Αν ο υπάλληλος του σταθμού Β φύγει για ένα 15λεπτο διάλειμμα αμέσως μετά τη λήψη του μηνύματος, ποια είναι η πιθανότητα ότι θα βρίσκεται παρών στο πόστο του για επαλήθευση;
(ε) Η διεύθυνση θέλει να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα ο υπάλληλος να είναι παρών και για την λήψη αλλά και για την επαλήθευση του μηνύματος. Είναι προτιμότερο να τον αφήσουν να κάνει το διάλειμμά του όπως περιγράφεται στο (δ) ή να τον αφήσουν να φύγει σπίτι του 45 λεπτά μετά την αποστολή του μηνύματος;

Άσκηση 3. Η Μαρία μπαίνει σε ένα καζίνο με μία μονάδα κεφαλαίου στην τσέπη της. Κοιτάζει το ρολόι της για να παράξει ένα τυχαίο αριθμό ομοιόμορφα κατανομημένο μεταξύ 0 και 1 ($U \sim \text{Uniform}[0, 1]$), και κατόπιν ποντάρει το ποσό U στο ρίξιμο ενός δίκαιου κέρματος. Επομένως, μετά τη ρίψη του κέρματος το κεφάλαιό της, X , είναι:

$$X = \begin{cases} 1 + U & \text{με πιθανότητα } 0.5 \\ 1 - U & \text{με πιθανότητα } 0.5. \end{cases}$$

Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X .

Άσκηση 4. (Κβάντιση) Έστω $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ μία εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ . Έστω $Y = \lfloor X \rfloor$ το ακέραιο μέρος της X . Δηλαδή, αν $k \leq X < k + 1$ τότε $Y = k$ για $k = 0, 1, 2, \dots$

(α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της Y .

(β) Ορίστε το σφάλμα κβάντισης ως $Z = X - \lfloor X \rfloor$. Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Z .

Άσκηση 5. (Ο κανόνας του Bayes για μία διακριτή και μία συνεχή τ.μ.) Σας δίδεται ένα κέρμα για το οποίο δεν γνωρίζετε το P (πιθανότητα να έρθει κεφαλή). Αλλά σας δίδεται ότι το P είναι τ.μ. ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[0, 1]$, $P \sim U[0, 1]$. Για να εκτιμήσετε καλύτερα την πιθανότητα κεφαλής για το κέρμα, εκτελείτε ένα πείραμα, ρίχνοντας το κέρμα 10 φορές. Έστω ότι Y_i , ($i = 1, 2, \dots, 10$), ισούται με 1 αν το αποτέλεσμα της i -στής ρίψης είναι κεφαλή και ισούται με 0 αλλιώς. Έστω X ο αριθμός των κεφαλών που προκύπτουν στις 10 ρίψεις. Προφανώς, $X|\{P = p\} \sim \text{Binomial}(10, p)$.

(α) Υποθέτοντας ότι $X = 9$, υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της εκ των υστέρων συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του P , $f_{P|X}(p|x = 9)$. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.

(β) Υποθέτοντας και πάλι ότι $X = 9$, δείξτε ότι

$$f_{P|Y_1, Y_2, \dots, Y_{10}}(p|y_1, y_2, \dots, y_{10}) = f_{P|X}(p|x = 9),$$

δηλαδή, η δεσμευμένη ς.π.π. του P δεδομένων των $Y_1, Y_2, \dots, Y_{10}$ εξαρτάται μόνο από το συνολικό πλήθος των κεφαλών X .