

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2011
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 12/12/2011

Ημερομηνία Παράδοσης: 21/12/2011

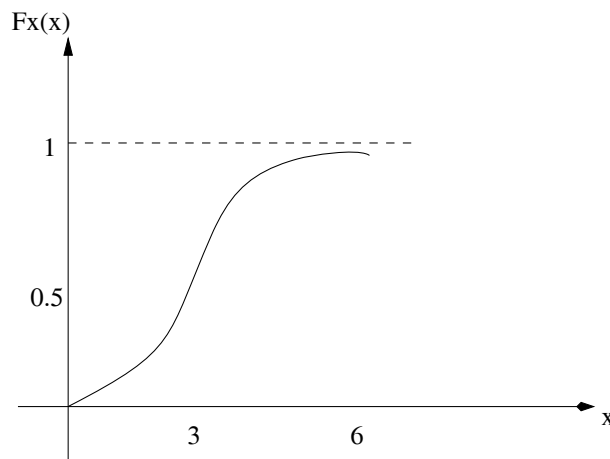
Άσκηση 1.

(α) Προφανώς θα πρέπει $c > 0$ (ώστε $f_X(x) \geq 0, \forall x$). Επίσης:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= 1 \Rightarrow c \int_0^3 x dx + c \int_3^6 (6-x) dx = 1 \\ c \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^3 + c \left(6x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_3^6 &= 1 \Rightarrow 9c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{9}\end{aligned}$$

(β) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές είναι $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$.
Συνεπώς:

- $x < 0 : F_X(x) = 0$
- $0 \leq x < 3 : F_X(x) = \frac{1}{9} \int_0^x u du = \frac{x^2}{18}$
- $3 \leq x < 6 : F_X(x) = \frac{1}{9} \int_0^3 u du + \frac{1}{9} \int_3^x (6-u) du = 1 - \frac{(6-x)^2}{18}$
- $x \geq 6 : F_X(x) = 1$



Σχήμα 1: Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής για το ερώτημα (β) Άσκηση 1.

(γ) Εφόσον ο αριθμός των κομματιών που πουλάει η εταιρία μέσα σε μια μέρα μετριέται σε χιλιάδες κομμάτια, τότε οι ζητούμενες πιθανότητες είναι οι εξής:

$$P(A) = P(X > 3) = 1 - F_X(3) = 0.5$$

και

$$P(B) = P(1.5 \leq X \leq 9) = F_X(9) - F_X(1.5) = 1 - 0.125 = 0.875$$

(δ) Η τομή των γεγονότων A και B είναι το γεγονός $A \cap B = 3 < X \leq 9$ και

$$P(A \cap B) = P(3 < X \leq 9) = P(X > 3) = 0.5 = P(A) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Οπότε τα γεγονότα A, B δεν είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 2.

(α)

$$\begin{aligned} P(|X| < 8) &= P(-8 < X < 8) \\ &= \Phi\left(\frac{8-2}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-8-2}{10}\right) \\ &= \Phi(0.6) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(0.6) - (1 - \Phi(1)) \\ &= \Phi(0.6) + \Phi(1) - 1 \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(X-4)^2] &= \mathbf{E}[X^2 - 8X + 16] \\ &= \mathbf{E}[X^2] - 8\mathbf{E}[X] + 16 \\ &= \text{var}(X) + \mathbf{E}^2[X] - 8\mathbf{E}[X] + 16 \\ &= 100 + 4 - 8 \cdot 2 + 16 = 104 \end{aligned}$$

Άσκηση 3.

(α) Η περιοχή όπου η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι c φαίνεται στο Σχήμα (2). Πρόκειται για ένα τρίγωνο με βάση 2 και ύψος 1. Για την σταθερά c πρέπει,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int f_{xy}(x, y) dx dy = 1,$$

ή

$$c \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1,$$

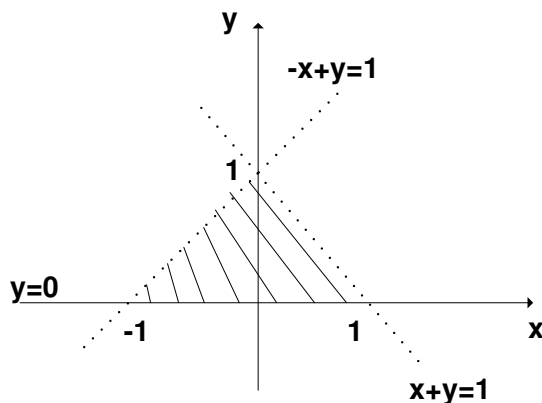
ή

$$c = 1,$$

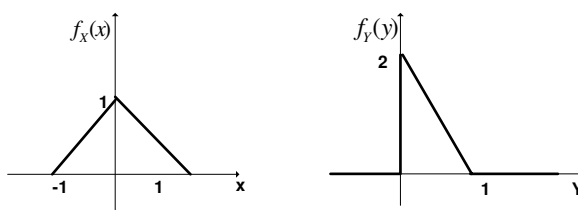
όπου το γινόμενο $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$ είναι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τριγώνου.

Γενικά ισχύει ότι $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy$. Από το Σχήμα (2) φαίνεται ότι,

- Για $-1 \leq x \leq 0$, $f_X(x) = \int_0^{1+x} c dy = 1 + x$
- Για $0 \leq x \leq 1$, $f_X(x) = \int_0^{1-x} c dy = 1 - x$.



Σχήμα 2: 2(a,i).



Σχήμα 3: 2(a,ii).

Άρα,

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x & , -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{αλλού.} \end{cases}$$

Ομοίως για $0 \leq y \leq 1$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx = \int_{y-1}^{1-y} c dx = 2(1-y)$. Δηλαδή,

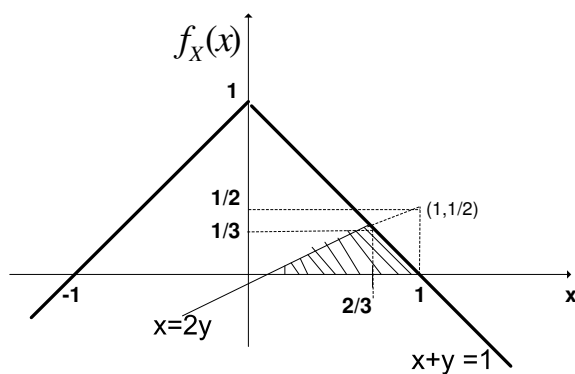
$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y) & , 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \text{αλλού.} \end{cases}$$

Προφανώς, Σχήμα (3), $f_{XY}(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ και οι τυχαίες μεταβλητές XY δεν είναι ανεξάρτητες.

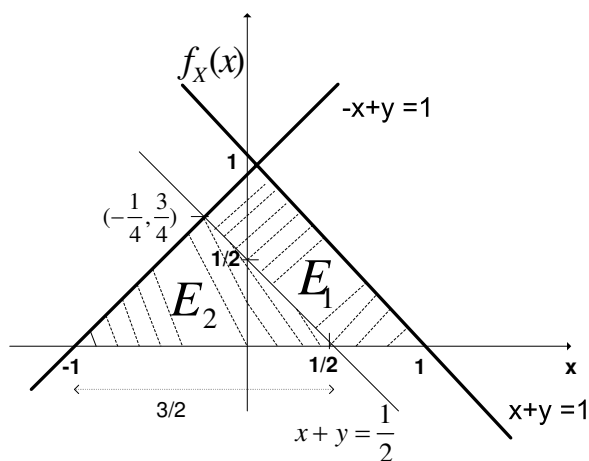
- (β)** Απαντάται πολύ εύκολα παρατηρώντας τη γραφική παράσταση του Σχήματος (4). Το ολοκλήρωμα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας στο γραμμοσκιασμένο τρίγωνο με βάση $(0, 1)$ και ύψος $\frac{1}{3}$ στο σημείο $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ισούται με την πιθανότητα $P(X \geq 2Y)$. Άρα, $P(X \geq 2Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$.

- (γ)** Ομοίως από το Σχήμα (5) έχουμε ότι,

$$P(X+Y \geq \frac{1}{2}) = c \cdot E_1 = c \cdot (E - E_2) = 1 \cdot (1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}) = \frac{7}{16}.$$



Σχήμα 4: 26.



Σχήμα 5: 2γ.

(δ)

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{2(1-y)}, \quad |x| \leq 1-y, \quad 0 < y < 1,$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{1-|x|}, \quad 0 < y < 1-|x|, \quad |x| \leq 1.$$