ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2011
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 28/11/2011 Ημερομηνία Παράδοσης: 12/12/2011

Άσκηση 1.

(α)

$$p_X(x) = \sum_{y=1}^{3} p_{X,Y}(x,y),\ \ x = 1,2,3$$

Από τον πίνακα τιμών της $p_{X,Y}(x,y)$ προκύπτει εύκολα ότι:

$$p_X(x) = \begin{cases} 4/9, & x = 1 \\ 3/9, & x = 2 \\ 2/9, & x = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Εύκολα προκύπτει ότι:

$$E[X] = \sum_{x=1}^{3} x p_X(x) = 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{9}$$

(β) Ομοίως,

$$p_Y(y) = \sum_{x=1}^{3} p_{X,Y}(x,y),\ \ y = 1,2,3$$

Από τον πίνακα τιμών της $p_{X,Y}(x,y)$ προκύπτει εύκολα ότι:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 2/9, & y = 1 \\ 3/9, & y = 2 \\ 4/9, & y = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Εύκολα προκύπτει ότι:

$$E[Y] = \sum_{y=1}^{3} y p_Y(y) = 1 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{9}$$

(γ) Έχουμε ότι:

$$P_{Y|A}(y) = \frac{P(Y = y,\, A)}{P(A)}$$

όπου,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X \leq 2) = \sum_{i=1}^{2} p_X(x) \\ &= p_X(1) + p_X(2) \\ &= \frac{4}{9} + \frac{3}{9} \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

Επίσης, ισχύει ότι:

- $\{Y=1\}\cap\{X\le 2\}=\Big\{(1,1),\ (2,1)\Big\}$. Άρα,
  $P(Y=1,\ A)=p_{X,Y}(1,1)+p_{X,Y}(2,1)=\frac{1}{9}+0=\frac{1}{9}$
- $\{Y=2\}\cap\{X\le 2\}=\Big\{(1,2),\ (2,2)\Big\}$. Άρα,
  $P(Y=2,\ A)=p_{X,Y}(1,2)+p_{X,Y}(2,2)=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{3}{9}$
- $\{Y=3\}\cap\{X\le 2\}=\Big\{(1,3),\ (2,3)\Big\}$. Άρα,
  $P(Y=3,\ A)=p_{X,Y}(1,3)+p_{X,Y}(2,3)=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{3}{9}$

Άρα, θα είναι:

$$p_Y|A(y)=\begin{cases}1/7, & y=1\\ 3/7, & y=2\\ 3/7, & y=3\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

Επίσης, ισχύει ότι:

$$E[Y|A]=\sum_{y=1}^{3} y\,p_{Y|A}(y)=1\cdot\frac{1}{7}+2\cdot\frac{3}{7}+3\cdot\frac{3}{7}=\frac{16}{7}$$

$$E[Y^2|A]=\sum_{y=1}^{3} y^2\,p_{Y|A}(y)=1^2\cdot\frac{1}{7}+2^2\cdot\frac{3}{7}+3^2\cdot\frac{3}{7}=\frac{40}{7}$$

$$var(Y|A)=E[Y^2|A]-\Big(E[Y|A]\Big)^2=\frac{40}{7}-\Big(\frac{16}{7}\Big)^2=\frac{24}{49}=0.49$$

(δ) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}E[Z] &= E[3X+2Y+7]=3E[X]+2E[Y]+7\\ &= 3\cdot\frac{16}{9}+2\cdot\frac{20}{9}+7\\ &= \frac{151}{9}\\ &= 16.78\end{aligned}$$

(ε) Καθώς οι $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, θα είναι:

$$p_{\tilde{X},\tilde{Y}}(x,y)=p_{\tilde{X}}\cdot p_{\tilde{Y}}(y),\ \ x,y=1,2,3.$$

όπου οι $p_{\tilde{X}}(x)$ και $p_{\tilde{Y}}(y)$ ακολουθούν τις εκφράσεις στα (α) και (β). Οι τιμές της $p_{\tilde{X},\tilde{Y}}(x,y)$ φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	$\tilde{Y}$=1	$\tilde{Y}$=2	$\tilde{Y}$=3
$\tilde{X}$=1	8/81	12/81	16/81
$\tilde{X}$=2	6/81	9/81	12/81
$\tilde{X}$=3	4/81	6/81	8/81

Άσκηση 2.

(α) Προφανώς, χρειάζεται να κερδίσει τουλάχιστον δύο φορές για κάθε φορά (εβδομάδα) που χάνει. Συνεπώς σε μια διάρκεια 5 εβδομάδων πρέπει να φέρει είτε 4 φόρες κεφαλή ($W_5 = 4$) είτε 5 φορές κεφαλή ($W_5 = 5$), για να έχει στο τέλος στην κατοχή του περισσότερα από 1 ευρώ.

$$\begin{aligned} P(\{\text{4K σε 5 εβδομάδες}\} \cup \{\text{5K σε 5 εβδομάδες}\}) &= \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{1}{2} + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ &= 5 \cdot \frac{1}{32} + \frac{1}{32} \\ &= \frac{3}{16} \\ &= 0.1875 \end{aligned}$$

(β)

$$E[X_i] = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{8}$$

Χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των X_i, έχουμε ευκολα:

$$E[W_n] = E[X_1 X_2 \cdots X_n] = E[X_1] \cdots E[X_n] = \left(\frac{9}{8}\right)^n.$$

Για $n = 10$ έχουμε $E[W_{10}] = 3,25$€ και για $n = 100$ έχουμε $E[W_{100}] \approx 130.992$€.

(γ)

$$E[X_i^2] = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{65}{32}$$

$$E[W_n^2] = E[X_1^2 X_2^2 \cdots X_n^2] = E[X_1^2] \cdots E[X_n^2] = \left(\frac{65}{32}\right)^n.$$

Επομενως:

$$\begin{aligned} \sigma_{W_n} &= \sqrt{var(W_n)} \\ &= \sqrt{E[W_n^2] - (E[W_n])^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{65}{32}\right)^n - \left(\frac{9}{8}\right)^{2n}} \\ &= \sqrt{\frac{(130^n - 81^n)}{64^n}} \\ &\approx \sqrt{\left(\frac{130}{64}\right)^n} \text{ για μεγάλα } n \\ &\approx \left(\sqrt{2}\right)^n \end{aligned}$$

Για $n = 10$ έχουμε $\sigma_{W_n} = 32$ και για $n = 100$ έχουμε $\sigma_{W_n} = 10^{15}$. Παρατηρούμε ότι για μεγάλα $n, \sigma_{W_n} >> E[W_n]$.

Άσκηση 3. Από την έκφραση της από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X και Y είναι προφανές ότι οι X και Y είναι ανεξάρτητες, καθώς:

$$p_{X,Y}(x, y) = c_1 x^2 \cdot c_2 \sqrt{y} = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

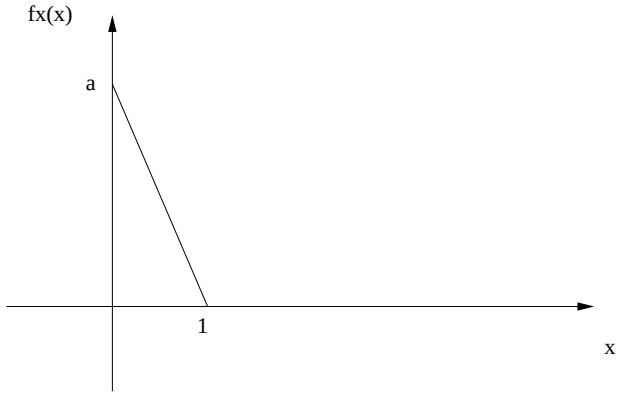
για κατάλληλες σταθερές c_1 και c_2. Συνεπώς $E[XY^3] = E[X] \cdot E[Y^3]$. Αλλά η συνάρτηση πιθανότητας της X, $p_X(x) = c_1 \cdot x^2$, είναι συμμετρική γύρω από το 0, άρα $E[XY^3] = 0 \cdot E[Y^3] = 0$.

Άσκηση 4.

(α) Πρέπει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 a(1-x)dx = 1 \Rightarrow \left(ax - \frac{a}{2}x^2\right)|_0^1 = 1 \Rightarrow a - \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$$

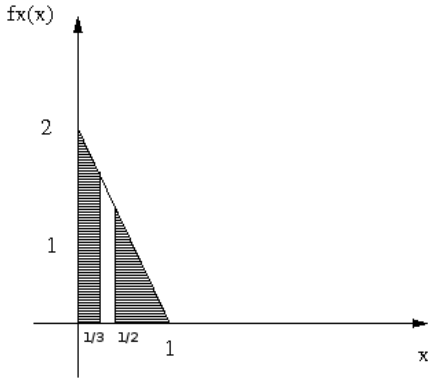
Εναλλακτικά, πρέπει η επιφάνεια του τριγώνου με βάση 1 και ύψος a να είναι ίση με 1 $\frac{1}{2} \cdot a \cdot 1 = 1 \Rightarrow a = 2$. Η γραφική παράσταση της σππ της X φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της $\sigma.\pi.\pi.$ για την Άσκηση 4, υποερώτημα (α).

(β)

$$\begin{aligned}
P\left(6X^2 > 5X - 1\right) &= P\left(6X^2 - 5X - 1 > 0\right) \\
&= P((3X-1)(2X-1) > 0) \\
&= P\left(X > \frac{1}{3} \cap X > \frac{1}{2}\right) + P\left(X < \frac{1}{3} \cap X < \frac{1}{2}\right) \\
&= P\left(X > \frac{1}{2}\right) + P\left(X < \frac{1}{3}\right) \\
&= 1 - P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) \\
&= 1 - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 2(1-x)dx = \frac{29}{36}
\end{aligned}$$



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση της $\sigma.\pi.\pi.$ για την Άσκηση 4, υποερώτημα (β).

(γ)

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 0 \text{ για } x < 0 \\ F_X(x) &= \int_0^x 2(1-t)dt = 2t - t^2 \,\big|_0^x = 2x - x^2 \quad \text{για } 0 \le x \le 1 \\ F_X(x) &= 1 \text{ για } x > 1 \end{aligned}$$

Τελικά:

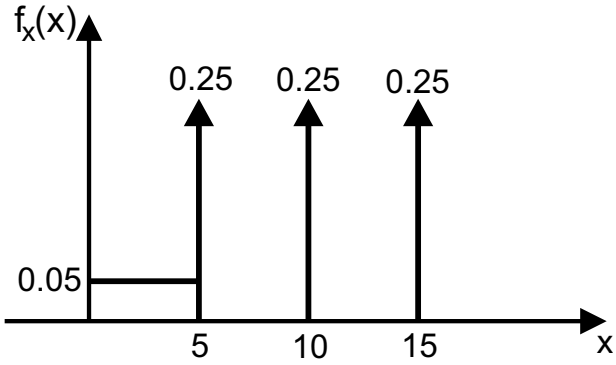
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 2x - x^2 & , 0 \le x \le 1 \\ 1 & , x > 1 \end{cases}$$

Άσκηση 5.

(α-i) $P(X \le 1) = F_X(1) = 0.05$
(α-ii) $P(X \le 10) = F_X(10) = 0.75$
(α-iii) $P(X > 10) = 1 - P(X \le 10) = 1 - 0.75 = 0.25$
(α-iv) $P(X \ge 10) = P(X > 10) + P(X = 10) = 0.25 + 0.25 = 0.5$
(α-v) $P(|X - 5| \le 0.1) = P(4.9 < X < 5.1) + P(X = 4.9) = F_X(5.1) - F_X(4.9) + 0 = 0.255$
(α-vi) Παρατηρώντας τις ασυνέχειες στην $F_X(u)$, συμπεραίνουμε ότι η X είναι <u>μικτή</u> τ.μ. Παίρνει τις τιμές $X = 5, 10, 15$ με μη-μηδενικές πιθανότητες:

$$P(X = 5) = P(X = 10) = P(X = 15) = 0.25$$

Επίσης, καθώς $F_X(x) = \dfrac{x}{20}$ για $0 \le x < 5$, παραγωγίζοντας παίρνω ότι $f_X(x) = \dfrac{1}{20}$ για $0 \le x < 5$. Η γραφική παράσταση της $\sigma.\pi.\pi.$ της X φαίνεται στο Σχήμα .



Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση της $\sigma.\pi.\pi.$ για την Άσκηση 5.

$$f_X(x) = \frac{1}{20}[u(x) - u(x-5)] + 0.25[\delta(x-5) + \delta(x-10) + \delta(x-15)]$$

(α-vi) $E[X] = \displaystyle\int_0^5 \frac{1}{20} x dx + 0.25(5 + 10 + 15) = \frac{1}{20}\frac{1}{2}x^2\Big|_0^5 + 0.25 \times 30 = 8.125$