

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2011
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 28/11/2011

Ημερομηνία Παράδοσης: 12/12/2011

Θέματα: Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές (II) και Συνεχείς τ.μ. (I).

Άσκηση 1. Θεωρείστε τις δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
$X = 2$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
$X = 3$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$

- (α) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. $p_X(x)$ της τ.μ. X . Υπολογίστε τη μέση τιμή της X , $E[X]$.
(β) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. $p_Y(y)$ της τ.μ. Y . Υπολογίστε τη μέση τιμή της Y , $E[Y]$.
(γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π. της τ.μ. Y , $p_{Y/A}(y)$, δεδομένου του γεγονότος $A = \{X \leq 2\}$. Ποια είναι η μέση τιμή, δεύτερη ροπή, και διασπορά της τ.μ. Y δεδομένου του A , δηλαδή ποια είναι τα $E[Y/A]$, $E[Y^2/A]$, και $\text{var}(Y/A)$, αντίστοιχα;
(δ) Έστω η τ.μ. $Z = g(X, Y) = 3X + 2Y + 7$. Υπολογίστε τη μέση τιμή της τ.μ. Z .
(ε) Έστω η τ.μ. $\tilde{X}$ με την ίδια σ.π. όπως η τ.μ. X και η τ.μ. $\tilde{Y}$ με την ίδια σ.π. όπως η τ.μ. Y . Έστω ότι οι τ.μ. $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$ είναι ανεξάρτητες. Υπολογίστε την από κοινού σ.π. των $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$.

Άσκηση 2. Στο παιχνίδι "Διπλασιάζω ή Τεταρτιάζω," ένα δίκαιο κέρμα ρίχνεται διαδοχικά και ανεξάρτητα. Ο παίκτης λαμβάνει πίσω το διπλάσιο του ποσού που πόνταρε όταν έρχεται κεφαλή, αλλά μόνο το ένα τέταρτο του ποσού όταν έρχονται γράμματα. Ποντάρει 1 ευρώ στην πρώτη ρίψη του κέρματος και συνεχίζει ποντάροντας όλα τα λεφτά του σε κάθε μία από τις επόμενες ρίψεις.

Για παράδειγμα, λαμβάνει πίσω 2 ευρώ αν η πρώτη ρίψη φέρει κεφαλή, αλλιώς μόνο 0,25 ευρώ αν η πρώτη ρίψη φέρει γράμματα. Στη δεύτερη ρίψη ποντάρει το συνολικό ποσό που διαθέτει (δηλαδή είτε τα 2 είτε τα 0,25 ευρώ) και λαμβάνει πίσω το διπλάσιο αν έρθει κεφαλή ή το ένα τέταρτο αν έρθουν γράμματα.

Το συνολικό ποσό που έχει ο παίκτης μετά από n ρίψεις συμβολίζεται από την τ.μ. W_n , η οποία μπορεί να εκφραστεί ως

$$W_n = X_1 \cdot X_2 \cdots X_n,$$

όπου οι τ.μ. X_i είναι ανεξάρτητες και έχουν συνάρτηση πιθανότητας $P(X_i = 2) = P(X_i = \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ο παίκτης να κερδίζει λεφτά (δηλαδή να διαθέτει περισσότερα από 1 ευρώ) μετά από 5 ρίψεις του ζαριού.

(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή του συνολικού ποσού, $E[W_n]$, που έχει ο παίκτης μετά από n ρίψεις.

(γ) Υπολογίστε τη τυπική απόκλιση του συνολικού ποσού, σ_{W_n} , που έχει ο παίκτης μετά από n ρίψεις. Συγκρίνετε τις τιμές των $E[W_n]$ και σ_{W_n} για μεγάλα n (π.χ. $n = 100$). Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 3. Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των διακριτών τ.μ. X και Y δίνεται από τη σχέση

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} Cx^2\sqrt{y} & \text{αν } x = -5, -4, \dots, +4, +5 \text{ και } y = 0, 1, \dots, 10 \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου C είναι κατάλληλη σταθερά. Υπολογίστε το $E[XY^3]$.

Άσκηση 4. Η συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

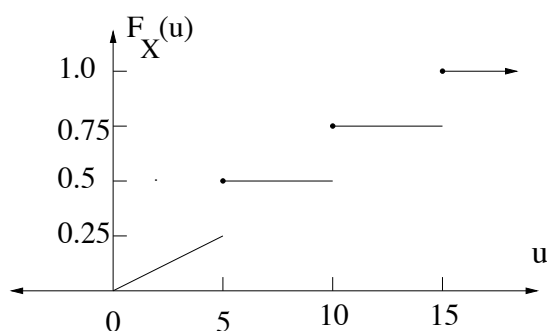
$$f_X(x) = \begin{cases} a(1-x) & \text{για } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. της X και υπολογίστε τη σταθερά a .

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(6X^2 > 5X - 1)$.

(γ) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) της X , $F_X(x)$.

Άσκηση 5. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(u)$ της τ.μ. X φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(u)$ της τ.μ. X .

Υπολογίστε τα ακόλουθα:

(α) $P(X \leq 1)$.

(β) $P(X \leq 10)$.

(γ) $P(X > 10)$.

(δ) $P(X \geq 10)$.

(στ) $P(|X - 5| \leq 0.1)$.

(ε) Κατανομή, $f_X(x)$, της X . Τι είδους μεταβλητή είναι η X ;

(ζ) Μέση τιμή, $E[X]$.