

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2011
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 14/11/2011

Ημερομηνία Παράδοσης: 23/11/2011

Άσκηση 1. Αφού $p(1) = P(A)$ και $p(0) = 1 - P(A)$, θα έχουμε ότι

$$E[I] = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot (1 - P(A)) = P(A).$$

Συνεπώς, η μέση τιμή της δείκτριας τυχαίας μεταβλητής ενός ενδεχομένου A ισούται με την πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A .

Άσκηση 2. Αφού ο κάθε μαθητής, που επιλέγεται τυχαία από τους 120 μαθητές, έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, έχουμε ότι

$$P(X = 36) = \frac{36}{120}, \quad P(X = 40) = \frac{40}{120}, \quad P(X = 44) = \frac{44}{120}$$

Συνεπώς,

$$E[X] = 36 \left(\frac{3}{10} \right) + 40 \left(\frac{1}{3} \right) + 44 \left(\frac{11}{30} \right) = \frac{1208}{30} = 40.2667.$$

Άσκηση 3. Ας υποθέσουμε ότι ο τροχός σταματά με πιθανότητα $1/6$ σε κάθε αριθμό και το κάθε αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα. Τότε, ο αριθμός των φορών που ο αριθμός στον οποίο στοιχημάτισε ο παίκτης εμφανίζεται είναι μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους $(3, \frac{1}{6})$. Συνεπώς, αν X είναι τα κέρδη του παίκτη σε ένα παιχνίδι, έχουμε

$$P\{X = -1\} = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{6} \right)^0 \left(\frac{5}{6} \right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$P\{X = 1\} = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{6} \right)^1 \left(\frac{5}{6} \right)^2 = \frac{75}{216}$$

$$P\{X = 2\} = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6} \right)^2 \left(\frac{5}{6} \right)^1 = \frac{15}{216}$$

$$P\{X = 3\} = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{6} \right)^3 \left(\frac{5}{6} \right)^0 = \frac{1}{216}$$

Για να προσδιορίσουμε αν αυτό συμφέρει ή όχι τον παίκτη, θα προσδιορίσουμε το αναμενόμενο κέρδος $E[X]$. Από τις προηγουμένως υπολογισμένες πιθανότητες, έχουμε

$$E[X] = \frac{-1 \cdot 125 + 1 \cdot 75 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 1}{216} = \frac{-17}{216}$$

Συνεπώς, σε βάθος χρόνου, ο παίκτης αναμένεται να χάνει 17 ευρώ κάθε 216 παιχνίδια.

Άσκηση 4.

(α) Ο αριθμός των μονάδων που λειτουργούν σε ένα σύστημα είναι μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους (n, p) . Από αυτό προκύπτει ότι η πιθανότητα ένα σύστημα 5 μονάδων να λειτουργεί αποτελεσματικά θα είναι

$$\binom{5}{3}p^3(1-p)^2 + \binom{5}{4}p^4(1-p) + p^5$$

ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα για ένα σύστημα με 3 μονάδες θα είναι

$$\binom{3}{2}p^2(1-p) + p^3$$

Συνεπώς, το σύστημα 5 μονάδων θα είναι καλύτερο αν

$$10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5 > 3p^2(1-p) + p^3$$

το οποίο ανάγεται στο

$$3(p-1)^2(2p-1) > 0$$

ή

$$p > \frac{1}{2}.$$

(β) Γενικότερα, ένα σύστημα με $2k+1$ μονάδες θα είναι καλύτερο από ένα σύστημα με $2k-1$ μονάδες αν (και μόνο αν) $p > 1/2$. Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας αυτό, ας θεωρήσουμε ένα σύστημα από $2k+1$ μονάδες και ας θέσουμε X να είναι ο αριθμός των $2k-1$ πρώτων μονάδων του συστήματος που λειτουργούν. Ας ονομάσουμε ένα σύστημα που λειτουργεί σωστά, "λειτουργικό". Τότε

$$P_{2k+1}(\text{λειτουργικό}) = P\{X \geq k+1\} + P\{X = k\}(1 - (1-p)^2) + P\{X = k-1\}p^2$$

αφού ένα σύστημα με $(2k+1)$ μονάδες θα είναι λειτουργικό αν λειτουργούν τουλάχιστον $k+1$ μονάδες:

(i) $X \geq k+1$, είτε

(ii) $X = k$ και τουλάχιστον μια από τις δύο υπόλοιπες μονάδες λειτουργεί, είτε

(iii) $X = k-1$ και οι δύο από τις υπόλοιπες μονάδες λειτουργούν

Αφού

$$P_{2k-1}(\text{λειτουργικό}) = P\{X \geq k\} = P\{X = k\} + P\{X \geq k+1\}$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned} & P_{2k+1}(\text{λειτουργικό}) - P_{2k-1}(\text{λειτουργικό}) \\ &= P\{X = k-1\}p^2 - (1-p)^2P\{X = k\} \\ &= \binom{2k-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^k p^2 - (1-p)^2 \binom{2k-1}{k}p^k(1-p)^{k-1} \\ &= \binom{2k-1}{k}p^k(1-p)^k[p - (1-p)], \text{ αφού } \binom{2k-1}{k-1} = \binom{2k-1}{k} \\ &> 0 \rightarrow p > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άσκηση 5. Το πλήθος των ελλατωματικών προϊόντων στα 10 τεμάχια ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 10$ και $p = 0.1$, δηλαδή $X \sim \Delta(n = 10, p = 0.1)$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} (0.1)^0 (0.9)^{10} = 1 - (0.9)^{10} = 0.6513.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση κατά Poisson, τότε $X \sim \text{Poisson}(\lambda = np = 1)$. Συνεπώς,

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-1} = 0.6321.$$

Άσκηση 6.

(α) Επιτυχή αποστολή ενός μηνύματος από την πηγή στον προορισμό έχουμε όταν λειτουργεί τουλάχιστον μία από τις δύο πρώτες παράλληλες συνδέσεις ΚΑΙ λειτουργεί η μεσαία σύνδεση ΚΑΙ λειτουργεί τουλάχιστον μία από τις τελευταίες παράλληλες συνδέσεις. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\begin{aligned} P(\text{επιτυχούς αποστολής}) &= (1 - (1 - p)^2) \cdot p \cdot (1 - (1 - p)^2) \\ &= (2p - p^2)p(2p - p^2) = \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{32} = 0.2813. \end{aligned}$$

(β) Εφόσον μπορεί να αποσταλεί ένα μήνυμα, τότε μπορούν να αποσταλούν 10 πακέτα (όλες οι συνδέσεις του δικτύου έχουν χωρητικότητα μεγαλύτερη ή ίση του 10). Περισσότερα από 10 πακέτα δεν είναι δυνατόν να αποσταλούν, δεδομένου ότι η χωρητικότητα της μεσαίας σύνδεσης είναι ίση με 10. Συνεπώς, η X μπορεί να πάρει δύο δυνατές τιμές: $X = 0$ και $X = 10$ με πιθανότητες οι οποίες υπολογίζονται χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α).

$$\begin{aligned} p_X(10) &= P(\text{επιτυχούς αποστολής}) = \frac{9}{32} = 0.2813. \\ p_X(0) &= P(\text{ανεπιτυχούς αποστολής}) = 1 - \frac{9}{32} = \frac{23}{32} = 0.7187. \end{aligned}$$

(γ) Ο ζητούμενος μέσος αριθμός των πακέτων που στέλνονται είναι

$$E[X] = 0 \cdot p_X(0) + 10 \cdot p_X(10) = \frac{90}{32} = \frac{45}{16} = 2.8125.$$

Άσκηση 7.

(α) Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων των δυνατών τιμών των x και y είναι 1. Συνεπώς:

$$1 \cdot 1 \cdot c + 1 \cdot 3 \cdot c + 2 \cdot 1 \cdot c + 2 \cdot 3 \cdot c + 4 \cdot 1 \cdot c + 4 \cdot 3 \cdot c = 1 \rightarrow c = \frac{1}{28}$$

(β) Υπάρχουν τρία σημεία για τα οποία ισχύει $Y < X$, τα $(2, 1)$, $(4, 1)$ και $(4, 3)$:

$$P(Y < X) = P((2, 1)) + P((4, 1)) + P((4, 3)) = 2 \cdot 1/28 + 4 \cdot 1/28 + 4 \cdot 3/28 = 18/28$$

(γ) Υπάρχουν δύο σημεία για τα οποία ισχύει $Y > X$, τα $(1, 3)$ και $(2, 3)$:

$$P(Y > X) = P((1, 3)) + P((2, 3)) = 1 \cdot 3/28 + 2 \cdot 3/28 = 9/28$$

(δ) Υπάρχει μόνο ένα σημείο για το οποίο ισχύει $Y = X$:

$$P(Y = X) = P((1, 1)) = 1 \cdot 1/28 = 1/28$$

Παρατηρήστε ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων στο ερωτήματα (β),(γ) και (δ) είναι 1, όπως αναμένεται.

(ε) Υπάρχουν τρία σημεία για τα οποία ισχύει $y = 3$, τα $(1, 3)$, $(2, 3)$ και $(4, 3)$:

$$P(Y = 3) = P((1, 3)) + P((2, 3)) + P((4, 3)) = 3/28 + 6/28 + 12/28 = 21/28$$

(στ) Γενικά, για δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές X και Y για τις οποίες είναι ορισμένη η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας, έχουμε:

$$p_X(x) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y), \quad p_Y(y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y)$$

Στην δεδομένη περίπτωση το πλήθος των δυνατών ζευγών (X, Y) είναι μικρό, οπότε μπορούμε να υπολογίζουμε τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας με απαρίθμηση. Για παράδειγμα:

$$p_X(2) = P((2, 1)) + P((2, 3)) = 8/28$$

Συνολικά έχουμε:

$$p_X(x) = \begin{cases} 4/28, & x = 1 \\ 8/28, & x = 2 \\ 16/28, & x = 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$p_Y(y) = \begin{cases} 7/28, & y = 1 \\ 21/28, & y = 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(ζ) Γενικά, η μέση τιμή για οποιαδήποτε διακριτή τυχαία μεταβλητή X είναι:

$$E[X] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x p_X(x).$$

Για αυτό το πρόβλημα,

$$E[X] = 1(1/7) + 2(2/7) + 4(4/7) = 3.$$

και

$$E[Y] = 1(1/4) + 3(3/4) = 5/2.$$

(η) Η διασπορά για μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X υπολογίζεται ως $E[X^2] - E[X]^2$ ή ως $E[(X - E[X])^2]$. Χρησιμοποιώντας τον δεύτερο τρόπο έχουμε:

$$\text{var}(X) = (1 - 3)^2(1/7) + (2 - 3)^2(2/7) + (4 - 3)^2(4/7) = 10/7$$

$$\text{var}(Y) = (1 - 5/2)^2(1/4) + (3 - 5/2)^2(3/4) = 5/8.$$