

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2011
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 14/11/2011

Ημερομηνία Παράδοσης: 23/11/2011

Θέματα: Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές (I).

Άσκηση 1. Λέμε ότι η τ.μ. I είναι μία *δείκτρια μεταβλητή* για το ενδεχόμενο A αν

$$I = \begin{cases} 1 & \text{αν συμβαίνει το } A \\ 0 & \text{αν δεν συμβαίνει το } A \end{cases}$$

Να βρεθεί η $E[I]$. Εκφράστε με λόγια το αποτέλεσμα.

Άσκηση 2. Μία σχολική τάξη με 120 μαθητές θα πάει να επισκευτεί με 3 λεωφορεία ένα μουσείο. Οι μαθητές έχουν κατανεμηθεί 36 στο πρώτο, 40 στο δεύτερο και 44 στο τρίτο λεωφορείο. Μόλις τα λεωφορεία φτάσουν, επιλέγουμε στην τύχη ένα μαθητή. Έστω X ο αριθμός των μαθητών που είναι στο λεωφορείο του τυχαία επιλεγμένου μαθητή. Να βρεθεί ή συνάρτηση πιθανότητας και η μέση τιμή της τ.μ. X .

Άσκηση 3. Το παρακάτω τυχερό παιχνίδι, γνωστό και σαν ο *τροχός της τύχης* παίζεται σε Λούνα Παρκ. Ένας παίκτης ποντάρει σε έναν από τους αριθμούς 1 έως 6. Ένας τροχός γυρνά τρεις φορές και σταματά κάθε φορά σε έναν από τους αριθμούς 1 έως 6. Αν ο αριθμός που στοιχημάτισε ο παίκτης εμφανιστεί i φορές, $i = 1, 2, 3$, τότε ο παίκτης κερδίζει i ευρώ. Αν πάλι ο αριθμός που στοιχημάτισε ο παίκτης δεν εμφανιστεί σε καμία από τις τρεις στροφές, ο παίκτης χάνει 1 ευρώ. Είναι το παιχνίδι συμφέρον για τον παίκτη; Απαντήστε το ερώτημα υπολογίζοντας το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη.

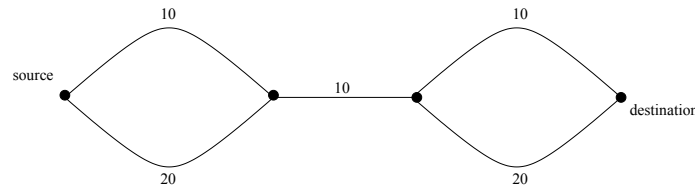
Άσκηση 4. Ένα σύστημα επικοινωνίας αποτελείται από n μονάδες, η κάθε μία από τις οποίες λειτουργεί σωστά με πιθανότητα ίση με p ανεξάρτητα από τις άλλες. Το σύστημα είναι σε θέση να λειτουργεί αποτελεσματικά αν τουλάχιστον οι μισές μονάδες του λειτουργούν.

(α) Για ποιες τιμές του p ένα σύστημα με 5 μονάδες έχει περισσότερη πιθανότητα να λειτουργεί σωστά από ένα σύστημα 3 μονάδων;

(β) Γενικότερα, πότε ένα σύστημα $2k + 1$ μονάδων είναι καλύτερο από ένα σύστημα $2k - 1$ μονάδων;

Άσκηση 5. Υποθέτουμε πως η πιθανότητα να παραχθεί ένα ελαττωματικό προϊόν από μία συγκεκριμένη μηχανή είναι 0.1. Να βρεθεί η πιθανότητα ένα δείγμα 10 τεμαχίων του προϊόντος που παρήγαγε η συγκεκριμένη μηχανή να περιέχει τουλάχιστον 1 ελαττωματικό τεμάχιο και να συγκριθεί με αυτή που δίνει η προσέγγιση με την κατανομή Poisson.

Άσκηση 6. Θεωρείστε το δίκτυο στο Σχήμα 1, όπου οι αριθμοί στις ακμές μεταξύ πηγής (source) και προορισμού (destination) δηλώνουν τη χωρητικότητα της αντίστοιχης σύνδεσης (μετρημένη σε πακέτα). Κάθε σύνδεση χαλάει με πιθανότητα $p = 1/2$ ανεξάρτητα από τις άλλες.



Σχήμα 1: Περιγραφή δικτύου της Άσκησης 6.

- (α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ένα μήνυμα μπορεί να αποσταλεί επιτυχώς από την πηγή στον προορισμό.
- (β) Ορίστε την τ.μ. X ως το πλήθος των πακέτων που μπορούν να σταλούν από την πηγή στον προορισμό. Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της X .
- (γ) Υπολογίστε τη μέση τιμή της X .

Άσκηση 7. Οι τ.μ. X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy & x \in \{1, 2, 4\} \text{ και } y \in \{1, 3\}, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- (α) Ποια είναι η τιμή της σταθεράς c ;
- (β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y < X)$.
- (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y > X)$.
- (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y = X)$.
- (ε) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y = 3)$.
- (στ) Υπολογίστε τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας $p_X(x)$ και $p_Y(y)$.
- (ζ) Υπολογίστε τις μέσες τιμές $E[X]$ και $E[Y]$.
- (η) Υπολογίστε τις διασπορές $var(X)$ και $var(Y)$.