

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2011
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 2/11/2011

Ημερομηνία Παράδοσης: 14/11/2011

Θέματα: Ανεξαρτησία, Συνδυαστική Ανάλυση, Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές.

Άσκηση 1. Ρίχνουμε ανεξάρτητα δύο δίκαια εξάεδρα ζάρια. Ορίζουμε τα γεγονότα: $A = \{\text{Το πρώτο ζάρι φέρνει: } 1, 2, \text{ ή } 3\}$, $B = \{\text{Το δεύτερο ζάρι φέρνει: } 2, 3, \text{ ή } 6\}$, και $C = \{\text{Το άθροισμα των δύο ρίψεων} = 9\}$.

- (α) Δείξτε ότι $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$;
(β) Είναι τα A , B , και C ανεξάρτητα;

Άσκηση 2. Τρεις παίκτες ρίχνουν ο καθένας από μία φορά ένα αμερόληπτο ζάρι n -πλευρών. Ας ορίσουμε σαν A_{ij} το γεγονός ότι ο παίκτης i και ο παίκτης j φέρνουν την ίδια πλευρά (αποτέλεσμα). Δείξτε ότι τα γεγονότα A_{12} , A_{13} και A_{23} είναι κατά ζεύγη ανεξάρτητα αλλά δεν είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 3. Σε ένα παιχνίδι μπριτζ όλα τα φύλλα από μία τράπουλα με 52 χαρτιά μοιράζονται σε 4 παίκτες. Ποια είναι η πιθανότητα:

- (α) Ένας παίκτης να πάρει όλα (και τα 13) μπαστούνια;
(β) Κάθε παίκτης να πάρει έναν άσο;

Άσκηση 4. Ανακατεύουμε μία τράπουλα με 52 χαρτιά και την τοποθετούμε στο τραπέζι.

- (α) Ποια η πιθανότητα ότι το χαρτί στην κορυφή είναι άσος;
(β) Κάνετε το εξής: Επιλέγετε ένα χαρτί, το βάζετε στην άκρη και κατόπιν επιλέγετε ένα δεύτερο χαρτί.
- Πριν δείτε τι είναι το πρώτο χαρτί, ποια η πιθανότητα ότι το δεύτερο χαρτί είναι άσος;
 - Έστω ότι το πρώτο χαρτί είναι άσος. Ποια η πιθανότητα ότι το δεύτερο χαρτί είναι ρήγας;
- (γ) Επιλέγετε 7 χαρτιά από την τράπουλα.
- Ποια η πιθανότητα ότι το χέρι των 7 χαρτιών περιέχει ακριβώς 3 άσσους;
 - Ποια η πιθανότητα ότι το χέρι των 7 χαρτιών περιέχει ακριβώς 2 ρηγάδες;
 - Ποια η πιθανότητα ότι το χέρι των 7 χαρτιών περιέχει ακριβώς 3 άσσους ή ακριβώς 2 ρηγάδες ή ακριβώς 3 άσσους και 2 ρηγάδες;

Άσκηση 5. Αν επιλέξουμε τυχαία 3 μπάλες από ένα κουτί που περιέχει 6 άσπρες και 5 μαύρες μπάλες, ποια η πιθανότητα μία από τις μπάλες της επιλογής μας να είναι άσπρη και οι δύο άλλες μαύρες;

Άσκηση 6. Εκτελούνται ανεξάρτητες δοκιμές που αποτελούνται από τη ρίψη ενός ζεύγους δίκαιων εξαέδρων ζαριών. Ποια η πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα 5 πριν να φέρουμε άθροισμα 7;

Άσκηση 7. Το πείραμά μας συνίσταται στη ρίψη 3 τίμιων κερμάτων. Συμβολίζουμε με Y τον αριθμό που μας λέει πόσες φορές εμφανίστηκε κορώνα. Να βρεθούν οι τιμές που παίρνει η τυχαία μεταβλητή Y και να βρεθούν οι αντίστοιχες πιθανότητες, δηλαδή να υπολογιστεί η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Y .

Άσκηση 8. Τρεις μπάλες επιλέγονται τυχαία χωρίς επανατοποθέτηση από ένα δοχείο το οποίο περιέχει 20 μπάλες αριθμημένες από το ένα έως και το είκοσι. Ορίζουμε τη τ.μ. X ως τον μεγαλύτερο από τους αριθμούς που έχουν επιλεγεί.

(α) Ποιο είναι το πεδίο τιμών της τ.μ. X ; Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας.

(β) Αν στιχηματίσουμε ότι μία τουλάχιστον από τις 3 μπάλες θα φέρει αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο από 17, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσουμε το στοίχημα;

Άσκηση 9. Η συνάρτησις πιθανότητας μιας τ.μ. X δίδεται από τη σχέση:

$$p_X(k) = c \frac{\lambda^k}{k!}; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

όπου λ είναι κάποιος θετικός αριθμός. Να υπολογιστούν:

(α) Η σταθερά c .

(β) $P(X = 0)$.

(γ) $P(X > 2)$.