

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2011
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 13/10/2011

Ημερομηνία Παράδοσης: 26/10/2011

Άσκηση 1. Ο δειγματοχώρος του πειράματος μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$\Omega = \{00000 \cdots 000 \cdots, 1, 01, 001, 0001, 00001, \dots\}$$

Έχουμε τα ακόλουθα:

$$A = \{1, 0001, 0000001, \dots\}$$

$$B = \{01, 00001, 00000001, \dots\}$$

$(A \cup B)^c = \{00000 \dots, 001, 000001, \dots\}$ Το γεγονός $(A \cup B)^c$ είναι να μην κερδίσει κανείς ή να κερδίσει ο παίκτης C .

Άσκηση 2. Έχουμε τα εξής:

$$(a) S = \{(1, g), (0, g), (1, f), (0, f), (1, s), (0, s)\}$$

$$(b) A = \{(1, s), (0, s)\}$$

$$(c) B = \{(0, g), (0, f), (0, s)\}$$

$$(d) B^c \cup A = \{(1, s), (0, s), (1, g), (1, f)\}$$

Άσκηση 3. Διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} P(M \cup W \cup G) &= P((M \cup W) \cup G) \\ &= P(M \cup W) + P(G) - P((M \cup W) \cap G) \\ &= P(M) + P(W) - P(MW) + P(G) - P((MG) \cup (WG)) \\ &= P(M) + P(W) - P(MW) + P(G) - P(MG) - P(WG) + P(MGW) \\ &= \frac{312 + 470 + 525 + 25 - (147 + 42 + 86)}{1000} \\ &= \frac{1057}{1000} > 1 \end{aligned}$$

Άσκηση 4. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(EF^c \cup E^cF) &= P(EF^c) + P(E^cF) \\ &= P(E) - P(EF) + P(F) - P(EF) \end{aligned}$$

Άσκηση 5. Το κουτί περιέχει 15 κόκκινες μπάλες και 5 άσπρες μπάλες (συνολικά 20 μπάλες).

(α) Έστω $P(A_1)$ η πιθανότητα η πρώτη μπάλα να είναι άσπρη. Τότε θα ισχύει ότι:

$$P(A_1) = \frac{5}{20}$$

Δεδομένου ότι η πρώτη μπάλα είναι άσπρη, τώρα θα υπάρχουν 19 μπάλες στο κουτί, από τις οποίες οι 4 μόνο θα είναι άσπρες. Η πιθανότητα ότι και η δεύτερη μπάλα που επιλέγεται τυχαία είναι άσπρη είναι η ακόλουθη:

$$P(A_2 | A_1) = \frac{4}{19}$$

Χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιαστικό νόμο, η πιθανότητα ότι και οι δύο μπάλες που επιλέγονται τυχαία είναι άσπρες θα είναι ίση με:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{1}{19}$$

(β) Έστω $P(K_1)$ η πιθανότητα η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη. Τότε θα ισχύει ότι:

$$P(K_1) = \frac{15}{20}$$

Δεδομένου ότι η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη, τώρα θα υπάρχουν 19 μπάλες στο κουτί, από τις οποίες οι 5 θα είναι άσπρες. Η πιθανότητα ότι η δεύτερη μπάλα που επιλέγεται τυχαία είναι άσπρη είναι η ακόλουθη:

$$P(A_2 | K_1) = \frac{5}{19}$$

Χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιαστικό νόμο, η πιθανότητα ότι η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη και η δεύτερη άσπρη θα είναι ίση με:

$$P(K_1 \cap A_2) = P(A_2 | K_1) \cdot P(K_1) = \frac{5}{19} \cdot \frac{15}{20} = \frac{15}{76}$$

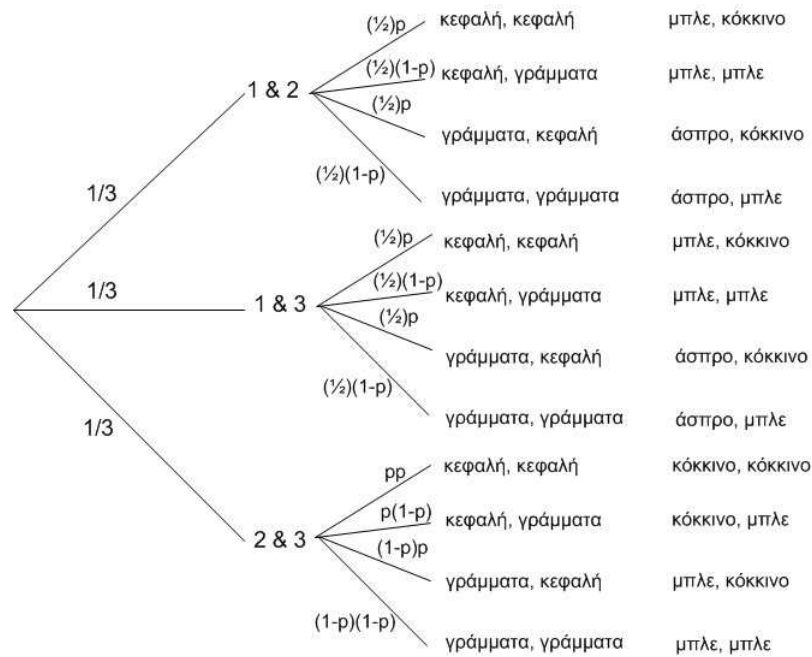
Άσκηση 6. (α) Το πείραμα θεωρούμε ότι γίνεται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση γίνεται η επιλογή των δύο κερμάτων, ενώ στη δεύτερη φάση γίνεται το ρίξιμο αυτών. Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει η επιλογή δύο κερμάτων από ένα σύνολο τριών: επιλέγουμε το πρώτο και το δεύτερο ή το πρώτο και το τρίτο ή το δεύτερο και το τρίτο. Καθένα από αυτά τα ζευγάρια έχει την ίδια πιθανότητα επιλογής. Επίσης, για κάθε ζευγάρι κερμάτων υπάρχουν τα εξής ενδεχόμενα ρίψεων: (κεφαλή, κεφαλή), (κεφαλή, γράμματα), (γράμματα, κεφαλή), (γράμματα, γράμματα). Άρα, ο δειγματοχώρος μπορεί να περιγραφεί με τον τρόπο που φαίνεται στο Σχήμα 1.

(β) Η πιθανότητα και οι δύο πλευρές που έρχονται μετά τη ρίψη των δύο κερμάτων να είναι βαμμένες με το ίδιο χρώμα είναι:

$$\begin{aligned} P(\text{πλευρές με ίδιο χρώμα}) &= P((\text{μπλε,μπλε})) + P((\text{κόκκινο,κόκκινο})) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2}(1-p) + \frac{1}{2}(1-p) + p^2 + (1-p)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{3}(2p^2 - 3p + 2) \end{aligned}$$

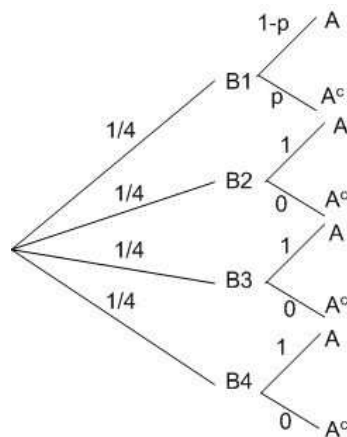
Όμως, $P(\text{πλευρές με ίδιο χρώμα}) = 29/96$.

Λύνοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση $(1/3)(2p^2 - 3p + 2) = 29/96$, βρίσκουμε ότι $p = 5/8$ ή $p = 7/8$.



Σχήμα 1: Δενδρική αναπαράσταση Άσκησης 6(α).

Άσκηση 7. Έστω A το ενδεχόμενο ότι ο φίλος σας ψάχνει στη δισκέτα 1 και δε βρίσκει τίποτα, και έστω B_i το ενδεχόμενο ότι η εργασία σας είναι στη δισκέτα i . Ο δειγματικός χώρος φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Δενδρική αναπαράσταση Άσκησης 7.

Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα B_1 , B_2 , B_3 και B_4 αποτελούν μια διαμέριση του δειγματικού χώρου. Όποτε, εφαρμόζουμε τον κανόνα του Bayes για να βρούμε την πιθανότητα ότι η εργασία βρίσκεται στη δισκέτα i δεδομένου ότι ο φίλος ψάχνει στη δισκέτα 1 αλλά δεν μπορεί να την

ανακτήσει:

$$\begin{aligned} P(B_i|A) &= \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) + P(B_4)P(A|B_4)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}P(A|B_i)}{\frac{1}{4} \cdot (1-p) + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1} = \frac{P(A|B_i)}{4-p} \end{aligned}$$

Άρα,

$$P(B_i|A) = \begin{cases} (1-p)/(4-p) & , \text{για } i = 1 \\ 1/(4-p) & , \text{για } i = 2, 3, 4 \end{cases}$$

Άσκηση 8. Έστω A_0 το ενδεχόμενο ότι διαβάζω το bit 0, έστω A_1 το ενδεχόμενο ότι διαβάζω το bit 1, έστω B_0 το ενδεχόμενο ότι το bit που διαβάζω είναι πράγματι 0 και έστω B_1 το ενδεχόμενο ότι το bit που διαβάζω είναι πράγματι 1. Οπότε, ισχύουν οι εξής πιθανότητες: $P(B_0|A_0) = 0.9$, $P(B_1|A_1) = 0.85$, $P(B_1|A_0) = 1 - P(B_0|A_0) = 1 - 0.9 = 0.1$, $P(B_0) = P(B_1) = 1/2$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(B_1|A_1)$. Από τον κανόνα του Bayes θα ισχύει:

$$\begin{aligned} P(B_1|A_1) &= \frac{P(B_1)P(A_1|B_1)}{P(B_1)P(A_1|B_1) + P(B_0)P(A_1|B_0)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}0.85}{\frac{1}{2}0.85 + \frac{1}{2}0.1} \\ &\cong 0.895 \end{aligned}$$