

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2011
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 13/10/2011

Ημερομηνία Παράδοσης: 26/10/2011

Άσκηση 1. Τρεις παίκτες, οι A, B, και C, ρίχνουν με αυτή τη σειρά ένα κέρμα. Ο πρώτος που θα φέρει κορώνα κερδίζει (οπότε και το παιχνίδι τελειώνει). Δώστε μία περιγραφή του δειγματικού χώρου Ω για αυτό το πείραμα τύχης. Με βάση την περιγραφή σας, ορίστε τα ακόλουθα γεγονότα στον Ω :

- (α) $A = \{\text{κερδίζει ο A}\}$
- (β) $B = \{\text{κερδίζει ο B}\}$
- (γ) $(A \cup B)^c$

Άσκηση 2. Ένα νοσοκομείο κωδικοποιεί τους ασθενείς του ανάλογα με το αν έχουν ή όχι υγειονομική ασφάλεια (1 αν είναι ασφαλισμένοι, 0 διαφορετικά), και επίσης ανάλογα με την κρισιμότητα της κατάστασής τους: καλή (g), ικανοποιητική (f), σοβαρή (s). Θεωρείστε το πείραμα της κωδικοποίησης ενός ασθενούς.

- (α) Δώστε μία περιγραφή του δειγματικού χώρου Ω .
- (β) Έστω A το γεγονός ότι η κατάσταση της υγείας ενός ασθενούς είναι σοβαρή. Ποια είναι τα απλά ενδεχόμενα που περιέχονται στο A ;
- (γ) Έστω B το γεγονός ότι ο ασθενής είναι ανασφάλιστος. Ποια είναι τα απλά ενδεχόμενα που περιέχονται στο B ;
- (δ) Δώστε όλα τα απλά ενδεχόμενα που περιέχονται στο γεγονός $B^c \cup A$.

Άσκηση 3. Τα ακόλουθα δεδομένα συλλέχθηκαν σε μια έρευνα ενός συνόλου 1000 συνδομητών κάποιου περιοδικού: Αναφορικά με την εργασία, οικογενειακή κατάσταση και μόρφωση, υπήρχαν 312 επαγγελματίες, 470 παντρεμένοι, 525 απόφοιτοι πανεπιστημίου, 42 επαγγελματίες απόφοιτοι κολεγίου, 147 παντρεμένοι απόφοιτοι πανεπιστημίου, 86 παντρεμένοι επαγγελματίες και 25 παντρεμένοι επαγγελματίες απόφοιτοι πανεπιστημίου. Αποδείξτε ότι τα νούμερα που αναφέρθηκαν στη μελέτη πρέπει να είναι ανακριβή.

Βοήθεια: Έστω M , W , και G τα σύνολα των επαγγελματιών, παντρεμένων και αποφοίτων πανεπιστημίου, αντίστοιχα. Υποθέστε ότι ένας από τους 1000 αναγνώστες επιλέγεται τυχαία και δείξτε ότι αν τα νούμερα είναι ακριβή, τότε $P(M \cup W \cup G) > 1$.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι η πιθανότητα να συμβεί μόνο ένα από τα γεγονότα E και F είναι ίση με $P(E) + P(F) - 2P(EF)$.

Άσκηση 5. Ένα κουτί περιέχει 15 κόκκινες και 5 άσπρες μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία δύο μπάλες χωρίς επανάθεση.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι και οι δύο μπάλες είναι άσπρες;
- (β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη και η δεύτερη είναι άσπρη;

Βοήθεια: Χρησιμοποιείτε τον πολλαπλασιαστικό νόμο.

Άσκηση 6. Μας δίνονται τρία κέρματα. Το πρώτο είναι ένα δίκαιο κέρμα και είναι βαμμένο μπλε στην κεφαλή (Κ) και άσπρο στα γράμματα (Γ). Τα άλλα δύο κέρματα δεν είναι δίκαια και έχουν πιθανότητα να έρθει κεφαλή ίση με p . Είναι βαμμένα κόκκινο στην κεφαλή και μπλε στα γράμματα. Διαλέγουμε τυχαία δύο από τα τρία κέρματα και τα ρίχνουμε.

- (α) Περιγράψτε το δειγματοχώρο αυτού του πειράματος τύχης με χρήση δενδρικού διαγράμματος.
- (β) Υπολογίστηκε εμπειρικά ότι η πιθανότητα να είναι και οι δύο πλευρές που έρχονται μετά την ρίψη των δύο κερμάτων βαμμένες με το ίδιο χρώμα είναι $29/96$. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές για το p ;

Άσκηση 7. Υποθέστε ότι ήσασταν αρκετά απερίσκεπτοι ώστε να σώσετε την εργασία σας στο HY-150 μόνο σε μία δισκέτα, η οποία δυστυχώς κράσαρε. Ακόμα χειρότερα, την είχατε φυλάξει σε ένα συρτάρι με άλλες τρεις επίσης χαλασμένες δισκέτες. Πριν πάρετε τις 4 δισκέτες σε έναν ειδικό για να ανακτήσετε την εργασία σας, ένας φίλος σας προσφέρεται να ρίξει μία ματιά και να σας γλυτώσει από τα έξοδα. Επιλέγετε λοιπόν τυχαία μία δισκέτα και την παραδίδετε στον φίλο σας. Αν η εργασία σας βρίσκεται στη δισκέτα που δίνετε στο φίλο σας, αυτός θα την ανακτήσει με πιθανότητα p . Δεδομένου ότι ψάχνει στη δισκέτα 1 αλλά δεν μπορεί να ανακτήσει την εργασία σας, ποια είναι η πιθανότητα ότι η εργασία σας βρίσκεται στην δισκέτα i , $i = 1, 2, 3, 4$;

Βοήθεια: Έστω A το ενδεχόμενο ότι ο φίλος σας ψάχνει στη δισκέτα 1 και δε βρίσκει τίποτα, και έστω B_i το ενδεχόμενο ότι η εργασία σας είναι στη δισκέτα i . Περιγράψτε το δειγματοχώρο αυτού του πειράματος τύχης με χρήση δενδρικού διαγράμματος και χρησιμοποιείτε το νόμο του Bayes.

Άσκηση 8. Μία μαγνητική ταινία η οποία περιέχει πληροφορία σε ψηφιακή μορφή έχει αλλοιωθεί. Προσπαθείτε να ανακτήσετε όσο το δυνατόν περισσότερα bits πληροφορίας. Προφανώς γνωρίζετε ότι αυτό που διαβάζετε πιθανώς είναι λάθος. Γνωρίζετε ότι αν υπήρχε ένα 0, η πιθανότητα να το διαβάσετε σωστά είναι 0.9. Επίσης, η πιθανότητα σωστής ανάγνωσης ενός 1 είναι 0.85. Κάθε bit στην ταινία είναι 0 ή 1 με την ίδια πιθανότητα. Δεδομένου ότι διαβάζετε 1 για κάποιο bit, ποια η πιθανότητα ότι το έχετε διαβάσει σωστά;