

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Προόδου

Ημερομηνία Διεξαγωγής: 27/11/2010

Θέμα 1.

(α) Ορίζουμε ως $C = A \cup B$ το γεγονός 'συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα A και B '. Επίσης, ορίζουμε ως $D = A^c \cup B^c$ το γεγονός 'ΔΕΝ συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα A και B '. Μας δίδεται ότι $P(C) = P(D) = 0.8$. Ζητάμε την πιθανότητα του γεγονότος $AB^c \cap A^c B$. Η τομή των C και D είναι:

$$\begin{aligned} C \cap D &= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = ((A \cup B) \cap A^c) \cup ((A \cup B) \cap B^c) \\ &= ((A \cap A^c) \cup (B \cap A^c)) \cup ((A \cap B^c) \cup (B \cap B^c)) \\ &= (\emptyset \cup BA^c) \cup (AB^c \cup \emptyset) = AB^c \cup BA^c \end{aligned}$$

Επίσης, $C \cup D = \Omega$ (φαίνεται εύκολα με ένα διάγραμμα Venn). Επομένως,

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) = P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(CD) \Rightarrow \\ &\Rightarrow P(CD) = 0.8 + 0.8 - 1 = 0.6 \Rightarrow P(AB^c \cup BA^c) = 0.6. \end{aligned}$$

(β) $E[X] = np = 100 \times 0.2 = 20$.

$var(X) = np(1-p) = 100 \times 0.2 \times 0.8 = 16$.

Επομένως, $E[X^2] = var(X) + (E[X])^2 = 16 + 20^2 = 416$.

(γ) $E[Y] = 3E[X] + 2 = 3np + 2 = 3 \times 4 \times \frac{1}{3} + 2 = 6$.

$var(Y) = 9var(X) = 9np(1-p) = 9 \times 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 8$.

Θέμα 2.

(α) Το καπέλο περιέχει τα ζεύγη $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ με ίδια πιθανότητα $1/6$. Επομένως $P(\{\text{η μπάλα 3 βρίσκεται στο καπέλο}\}) = P(\{1, 3\} \cup \{2, 3\} \cup \{3, 4\}) = 3 \times 1/6 = 1/2$.

(β)

Ενδεχόμενα του Ω	Πιθανότητα	X	$p_X(x)$
$\{1, 2\}$	$1/6$	3	$1/6$
$\{1, 3\}$	$1/6$	4	$1/6$
$\{1, 4\}$	$1/6$	5	$2/6$
$\{2, 3\}$	$1/6$	5	
$\{2, 4\}$	$1/6$	6	$1/6$
$\{3, 4\}$	$1/6$	7	$1/6$

Συνεπώς,

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x = 3, 4, 6, 7 \\ \frac{2}{6} & x = 5 \end{cases}$$

$$E[X] = (3 + 4 + 6 + 7) \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{2}{6} = 5.$$

$$E[X^2] = (3^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2) \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{2}{6} = \frac{160}{6}.$$

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{160}{6} - 5^2 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

(γ) Μετά την κλοπή της μπάλας 3, το καπέλο θα περιέχει τα εξής: $\{1, 2\}, \{1\}, \{1, 4\}, \{2\}, \{2, 4\}, \{4\}$ με ίση πιθανότητα $1/6$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας, έχουμε:

$$P(\{\text{η μπάλα που επιλέγεται έχει περιττό αριθμό (δηλαδή 1)}\}) = \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 0 + 0 + 0\right) \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Θέμα 3.

(α) Όταν ο καθηγητής βάζει πίσω στην τσέπη του το λάθος κλειδί, δηλαδή επιλέγει με επανάρτηση, έχουμε ουσιαστικά μια ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p = 1/n$ και αποτυχίας $1 - p = 1 - 1/n$. Η τ.μ. X είναι το πλήθος των προσπαθειών έως την πρώτη επιτυχία και επομένως, $X \sim \text{Γεωμετρική}(p = 1/n)$. Συνεπώς,

$$p_X(k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{n}; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

και

$$E[X] = \frac{1}{p} = n.$$

(β) Όταν ο καθηγητής βάζει στην άκρη το λάθος κλειδί, δηλαδή επιλέγει χωρίς επανατοποθέτηση, η τ.μ. X μπορεί να πάρει τιμές $X = 1, 2, \dots, n$. Το γεγονός $\{X = k\}, k = 1, 2, \dots, n$ συμβαίνει όταν το σωστό κλειδί βγαίνει k -στό στη σειρά από την τσέπη του. Σκεφτόμαστε λοιπόν μια διάταξη των n κλειδιών στην τσέπη του καθηγητή. Υπάρχουν $n!$ τέτοιες διατάξεις (το πλήθος των μεταθέσεων n αντικειμένων) και ο καθηγητής βγάζει τα κλειδιά από την τσέπη του με τη σειρά που έχουν διαταχθεί. Ακριβώς $(n-1)!$ από όλες τις $n!$ διατάξεις έχουν το σωστό κλειδί ως k -στό στη σειρά (καθώς τα $n-1$ λάθος κλειδιά καταλαμβάνουν τις $n-1$ άλλες θέσεις με $(n-1)!$ τρόπους). Συνεπώς,

$$P(X = k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \quad \text{για } k = 1, 2, \dots, n.$$

Άρα σε αυτή την περίπτωση, η τ.μ. X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με πεδίο τιμών $\{1, 2, \dots, n\}$. Συνεπώς $E[X] = \frac{n+1}{2}$. Βλέπουμε ότι η στρατηγική που βάζει τα λάθος κλειδιά στην άκρη αντί να τα τοποθετεί πάλι πίσω στην τσέπη μειώνει το μέσο όρο προσπαθειών σχεδόν στο μισό!

Θέμα 4.

(α) Οι τυχαίες μεταβλητές V και W δεν γίνεται να είναι ανεξάρτητες. Π.χ., αν $V = 12$ (δηλαδή $X = Y = 3$) τότε $W = 0$.

(β) Μας δίνεται ότι

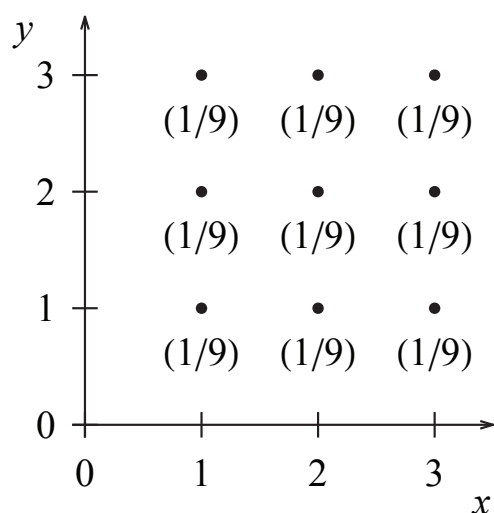
$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

και

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & y = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Επίσης, οι X και Y είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς, $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{9} & x, y \in \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$

Η γραφική παράσταση της $p_{X,Y}(x, y)$ φαίνεται στο Σχήμα 1.

Σχήμα 1: Γραφική παράσταση της $p_{X,Y}(x,y)$.

(γ) Εύκολα προκύπτει ότι η τ.μ. $V = 2X + 2Y$ παίρνει τιμές $\{4, 6, 8, 10, 12\}$.

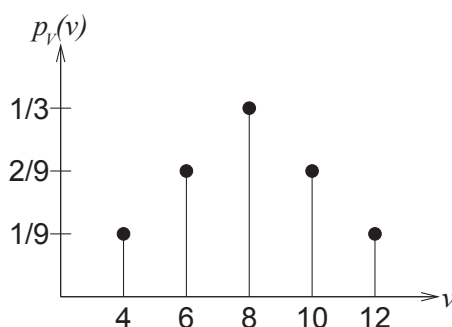
$$P(\{V = 4\}) = P((X, Y) = (1, 1)) = \frac{1}{9}$$

$$P(\{V = 6\}) = P((X, Y) = (1, 2) \text{ ή } (2, 1)) = \frac{2}{9}$$

$$P(\{V = 8\}) = P((X, Y) = (2, 2) \text{ ή } (1, 3) \text{ ή } (3, 1)) = \frac{3}{9}$$

$$P(\{V = 10\}) = P((X, Y) = (2, 3) \text{ ή } (3, 2)) = \frac{2}{9}$$

$$P(\{V = 12\}) = P((X, Y) = (3, 3)) = \frac{1}{9}$$

Σχήμα 2: Γραφική παράσταση της $p_V(v)$.

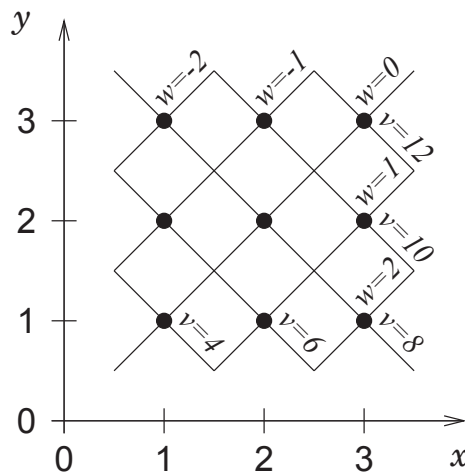
Συνεπώς, η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. V είναι:

$$p_V(v) = \begin{cases} 1/9 & v = 4, 12 \\ 2/9 & v = 6, 10 \\ 3/9 & v = 8 \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$$

με γραφική παράσταση που φαίνεται στο Σχήμα 2. Λόγω συμμετρίας, $E[V] = 8$. Επίσης,

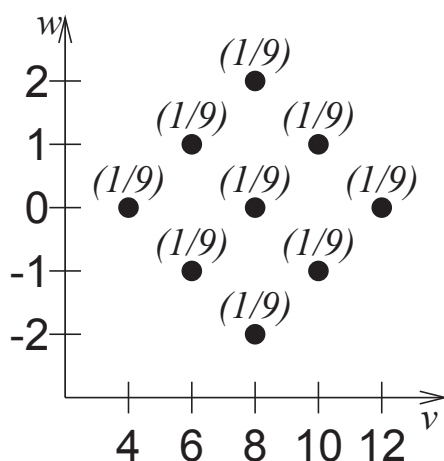
$$\text{var}(V) = \text{var}(2(X + Y)) = 4\text{var}(X + Y) = 4(\text{var}(X) + \text{var}(Y)) = 4 \times 2 \times \frac{3^2 - 1}{12} = \frac{16}{3}.$$

(δ) Η γραφική παράσταση στο Σχήμα 3 μας βοηθά στον υπολογισμό της $p_{V,W}(v, w)$.



Σχήμα 3: Γραφική παράσταση της $p_{X,Y}(x, y)$ με σημειωμένες τις τιμές των (v, w) .

Αυτό γίνεται υπολογίζοντας σε ποιό ζευγάρι τιμών (v, w) αντιστοιχεί κάθε δυνατό ζευγάρι τιμών (x, y) . Π.χ., στο ζευγάρι $(x, y) = (1, 1)$ αντιστοιχεί μόνο το ζευγάρι $(v, w) = (4, 0)$. Είναι μία αντιστοίχιση 1 προς 1 και εύκολα προκύπτει η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p_{V,W}(v, w)$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο Σχήμα 4.



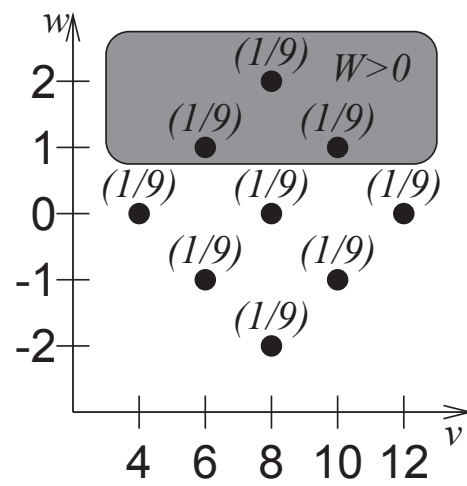
Σχήμα 4: Γραφική παράσταση της $p_{V,W}(v, w)$.

(ε) Έχουμε ότι $P(W > 0) = P(W = 1) + P(W = 2) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$ (δες το Σχήμα 5). Η δεσμευμένη σ.π. της τ.μ. V δεδομένου του $\{w > 0\}$ είναι (δες και το Σχήμα 5):

$$\begin{aligned} p_{V|W>0}(v) &= \frac{P(V = v \cap W > 0)}{P(W > 0)}, v = 4, 6, 8, 10, 12 \\ &= \begin{cases} 0 & v = 4, 12 \\ \frac{1/9}{1/3} & v = 6, 8, 10 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & v = 4, 12 \\ 1/3 & v = 6, 8, 10 \end{cases} \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$E[V|W > 0] = (6 + 8 + 10) \frac{1}{3} = 8.$$



Σχήμα 5: Γραφική παράσταση της $p_{V,W}(v, w)$.