

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Λύσεις Τελικής Εξέτασης - 7 Σεπτεμβρίου 2011

Θέμα 1.

(α) Ορίζουμε την τ.μ. X_k ως την παραγωγή της k -οστής γραμμής. Συνεπώς, $X_k \sim \exp(1/5)$ καθώς μας δίδεται ότι $E[X_k] = 5$ και ισχύει ότι $\lambda_k = \frac{1}{E[X_k]}$.

$$P(X_k > 4) = \int_4^{+\infty} f_{X_k}(x) dx = \int_4^{+\infty} \frac{1}{5} e^{-x/5} dx = -e^{-x/5} \Big|_4^{+\infty} = e^{-4/5} = 0.45$$

(β) Έστω K το πλήθος των γραμμών επεξεργασίας με παραγωγή περισσότερους από 4 τόνους. Τότε, προφανώς, $K \sim \Delta(n=3, p=0.45)$. Συνεπώς,

$$P(K=2) = \binom{3}{2} 0.45^2 (1-0.45)^{3-2} = 0.334$$

(γ) $P(E) = P(K \geq 1) = 1 - P(K=0) = 1 - (1-0.45)^3 = 0.834$.

(δ) Έστω M το πλήθος των ημερών (από τις 100) που παρατηρήθηκε το γεγονός E . Τότε,

$$M \sim \Delta(n=100, p=0.834) \text{ και } P(M > 55) = \sum_{m=56}^{100} \binom{100}{m} 0.834^m (1-0.834)^{100-m}.$$

Θέμα 2.

(α-i) $P(X \leq 1) = F_X(1) = 0.05$

(α-ii) $P(X \leq 10) = F_X(10) = 0.75$

(α-iii) $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - 0.75 = 0.25$

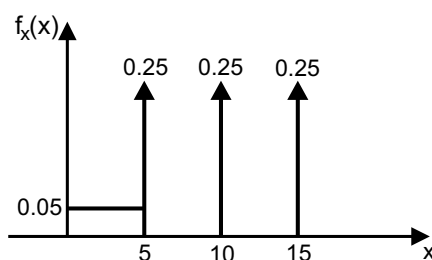
(α-iv) $P(X \geq 10) = P(X > 10) + P(X = 10) = 0.25 + 0.25 = 0.5$

(α-v) $P(|X-5| \leq 0.1) = P(4.9 < X < 5.1) + P(X=4.9) = F_X(5.1) - F_X(4.9) + 0 = 0.255$

(α-vi) Παρατηρώντας τις ασυνέχειες στην $F_X(u)$, συμπεραίνουμε ότι η X είναι μικτή τ.μ. Παίρνει τις τιμές $X = 5, 10, 15$ με μη-μηδενικές πιθανότητες:

$$P(X=5) = P(X=10) = P(X=15) = 0.25$$

Επίσης, καθώς $F_X(x) = \frac{x}{20}$ για $0 \leq x < 5$, παραγωγίζοντας παίρνω ότι $f_X(x) = \frac{1}{20}$ για $0 \leq x < 5$. Έτσι:



$$f_X(x) = \frac{1}{20} [u(x) - u(x-5)] + 0.25 [\delta(x-5) + \delta(x-10) + \delta(x-15)]$$

$$(a-vi) E[X] = \int_0^5 \frac{1}{20} x dx + 0.25(5 + 10 + 15) = \frac{1}{20} \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^5 + 0.25 \times 30 = 8.125$$

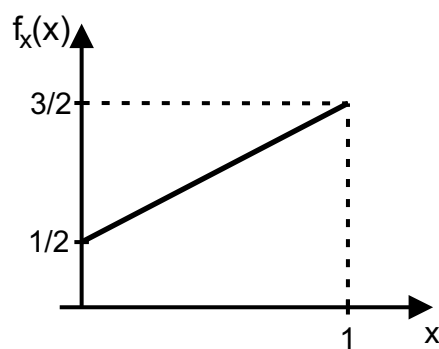
$$(b-i) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^1 (x+y) dy = xy + \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = x + \frac{1}{2}; 0 < x < 1$$

Άρα,

$$f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Λόγω συμμετρίας:

$$f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



Βλέπουμε ότι $f_{X,Y} \neq f_X(x)f_Y(y)$, άρα οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.

$$(b-ii) f_{Y|X}(y|\frac{1}{3}) = \frac{f_{X,Y}(\frac{1}{3}, y)}{f_X(\frac{1}{3})} = \frac{\frac{1}{3} + y}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{5} + \frac{6}{5}y; 0 < y < 1 \text{ και είναι } 0 \text{ αλλού.}$$

Θέμα 3.

(a) Έστω T το συνολικό κέρδος (ζημία). Η $T = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ είναι Γκαουσιανή ως άθροισμα n ανεξάρτητων Γκαουσιανών τ.μ.

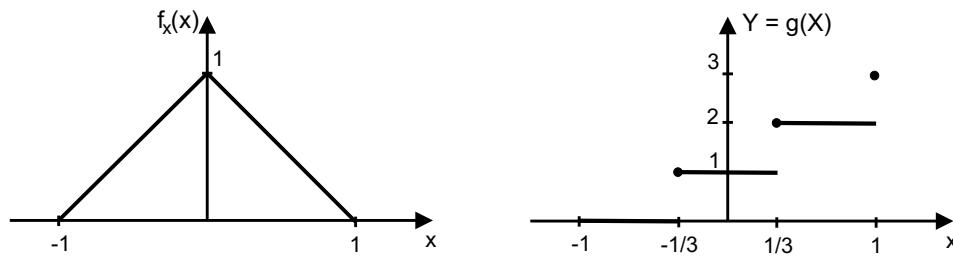
$$\begin{aligned} E[T] &= E[X_1] + \dots + E[X_n] = n \cdot 0 = 0 \\ var(T) &= var(X_1) + \dots + var(X_n) = n\sigma^2 \\ T &\sim N(0, n\sigma^2) \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} P(|T| > 2\sqrt{n}\sigma) &= P(T > 2\sqrt{n}\sigma) + P(T < -2\sqrt{n}\sigma) \\ &= 2P(T > 2\sqrt{n}\sigma) \quad (\text{λόγω συμμετρίας}) \\ &= 2(1 - P(T \leq 2\sqrt{n}\sigma)) \\ &= 2(1 - P(\frac{T - 0}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{2\sqrt{n}\sigma - 0}{\sqrt{n}\sigma})) \\ &= 2(1 - \Phi(2)) = 0.0454 \end{aligned}$$

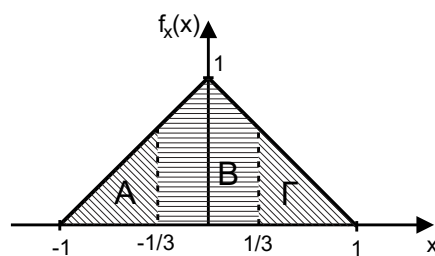
Θέμα 4.

(α)



Η Y παίρνει τις τιμές 0,1,2,3 ανάλογα αν $-1 \leq X < -\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3} \leq X < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} \leq X < 1$, $X = 1$

(β)



Καθαρά, η τ.μ. Y είναι διακριτή.

$$P(Y = 0) = P(-1 \leq X < -\frac{1}{3}) = E(A) = \frac{2}{9}$$

$$P(Y = 1) = P(-\frac{1}{3} \leq X < \frac{1}{3}) = E(B) = \frac{5}{9}$$

$$P(Y = 2) = P(\frac{1}{3} \leq X < 1) = E(\Gamma) = \frac{2}{9}$$

$$P(Y = 3) = 0$$