

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
7 Σεπτεμβρίου 2011 - Διάρκεια: 3 Ώρες

Θέμα 1 - 20 μονάδες.

Ένα εργοστάσιο ζάχαρης έχει τρεις γραμμές επεξεργασίας. Η ποσότητα ζάχαρης που παράγεται από κάθε γραμμή επεξεργασίας είναι τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 5 (τόνους). Υποθέτουμε, επίσης, ότι κάθε γραμμή λειτουργεί ανεξάρτητα από τις άλλες.

(α) (5 μονάδες) Υπολογίστε την πιθανότητα μία τυχαία γραμμή να παράγει περισσότερους από 4 τόνους ζάχαρης.

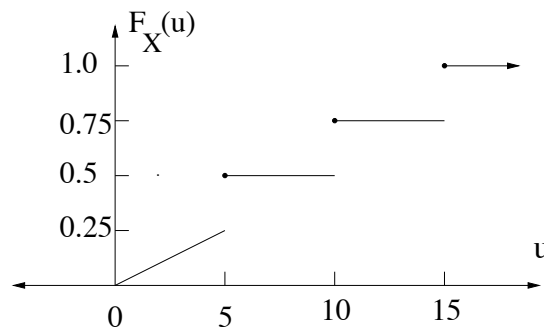
(β) (5 μονάδες) Ποια η πιθανότητα 2 ακριβώς από τις 3 γραμμές να παράγουν περισσότερους από 4 τόνους ζάχαρης;

(γ) (5 μονάδες) Ποια η πιθανότητα τουλάχιστον μία από τις γραμμές να παράγει περισσότερους από 4 τόνους ζάχαρης (γεγονός Ε);

(δ) (5 μονάδες) Καταγράφουμε για ένα διάστημα 100 ημερών τις ημέρες που παρατηρείται το γεγονός Ε. Ποια η πιθανότητα να έχουμε καταγράψει περισσότερες από 55 μέρες;

Θέμα 2 - 30 μονάδες. Βασικές έννοιες συνεχών τ.μ.

(α) (15 μονάδες) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(u)$ της τ.μ. X φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(u)$ της τ.μ. X .

Υπολογίστε τα ακόλουθα:

(α-i) (1 μονάδα) $P(X \leq 1)$.

(α-ii) (1 μονάδα) $P(X \leq 10)$.

(α-iii) (1 μονάδα) $P(X > 10)$.

(α-iv) (1 μονάδα) $P(X \geq 10)$.

(α-v) (1 μονάδα) $P(|X - 5| \leq 0.1)$.

(α-vi) (5 μονάδες) Κατανομή, $f_X(x)$, της X . Τι είδους μεταβλητή είναι η X ;

(α-vii) (5 μονάδες) Μέση τιμή, $E[X]$.

(β) (15 μονάδες) Δύο συνεχείς τ.μ. X και Y έχουν την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(β-i) (10 μονάδες) Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π.. Υπολογίστε τις περιθωριακές σ.π.π. $f_X(x)$ και $f_Y(y)$. Δώστε τη γραφική παράσταση των δύο σ.π.π.. Είναι οι τ.μ. X και Y ανεξάρτητες;

(β-ii) (5 μονάδες) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π.π. της Y δεδομένου του $X = 1/3$, δηλαδή τη συνάρτηση $f_{Y|X}(y|\frac{1}{3})$.

Θέμα 3 - 25 μονάδες. Κανονική κατανομή.

Σε ένα καζίνο παίζετε το λεγόμενο Γκαουσιανό κουλοχέρη: Ο κουλοχέρης αυτός παράγει νούμερα από ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες Γκαουσιανές τ.μ. $X_1, X_2, \dots$ με μηδενική μέση τιμή και διασπορά σ^2 , δηλαδή $X_i \sim N(0, \sigma^2)$. Σε κάθε γύρο i , αν το X_i είναι θετικό, κερδίζετε το ποσό X_i σε ευρώ, ενώ αν το X_i είναι αρνητικό, χάνετε ποσό ίσο με $|X_i|$.

(α) (10 μονάδες) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά του συνολικού κέρδους ή ζημιάς σας μετά από n γύρους.

(β) (15 μονάδες) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η απόλυτη τιμή του συνολικού κέρδους ή ζημιάς είναι μεγαλύτερη από $2\sqrt{n}\sigma$;

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Συναρτήσεις τ.μ.

Έστω τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| < 1 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Ορίζουμε μια νέα τ.μ. Y ως εξής:

$$Y = g(X) = \lfloor \frac{3(X+1)}{2} \rfloor$$

όπου $\lfloor a \rfloor$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του a , δηλαδή $\lfloor a \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq a\}$.

(α) (10 μονάδες) Δώστε τις γραφικές παραστάσεις της σ.π.π. της τ.μ. X καθώς και του μετασχηματισμού $Y = g(X)$.

(β) (15 μονάδες) Τι είδους τ.μ. είναι η Y ; Υπολογίστε την κατανομή της.