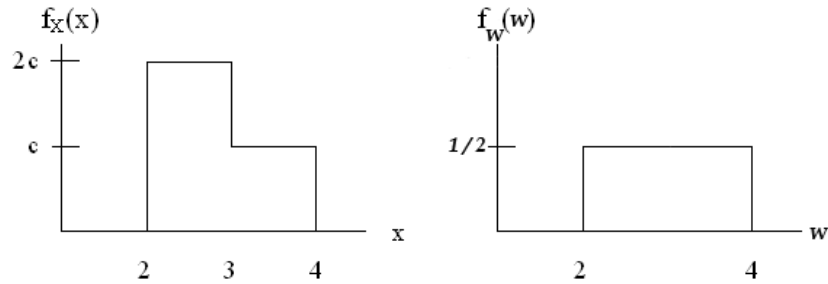


ΗΥ-217: Πιθανότητες
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τελικής Εξέτασης - 4 Φεβρουαρίου 2011

Θέμα 1.

(α) Οι γραφικές παραστάσεις των $f_X(x)$ και $f_W(w)$ φαίνονται στο σχήμα :



Πρέπει το εμβαδόν κάτω από την $f_X(x)$ να είναι ίσο με 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_2^3 2c dx + \int_3^4 c dx = 2c + c = 3c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{3}.$$

(β)

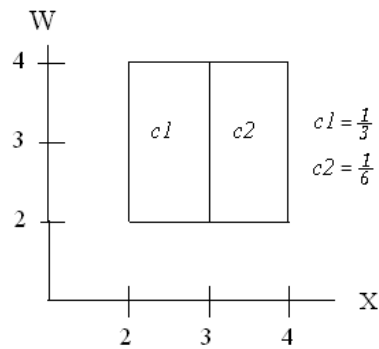
$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_2^3 x \frac{2}{3} dx + \int_3^4 x \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}(3^2 - 2^2) + \frac{1}{6}(4^2 - 3^2) \\ &= \frac{5}{3} + \frac{7}{6} = \frac{17}{6} = 2.8\bar{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_2^3 x^2 \frac{2}{3} dx + \int_3^4 x^2 \frac{1}{3} dx = \frac{2}{9}(3^3 - 2^3) + \frac{1}{9}(4^3 - 3^3) \\ &= \frac{38}{9} + \frac{37}{9} = \frac{75}{9} = 8.\bar{3}. \end{aligned}$$

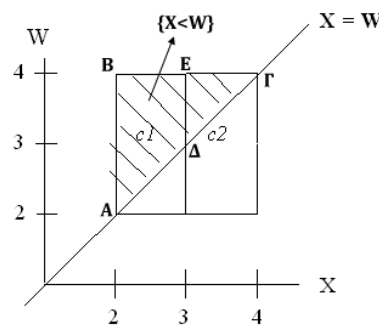
$$\text{Επομένως, } \text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{25}{3} - \left(\frac{17}{6}\right)^2 = 0.31.$$

(γ) Καθώς οι τ.μ. X και W είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους:

$$f_{X,W}(x, w) = f_X(x) \cdot f_W(w) = f_X(x) \cdot \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, & 2 \leq x < 3, 2 \leq w \leq 4 \\ \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, & 3 \leq x \leq 4, 2 \leq w \leq 4 \end{cases}$$



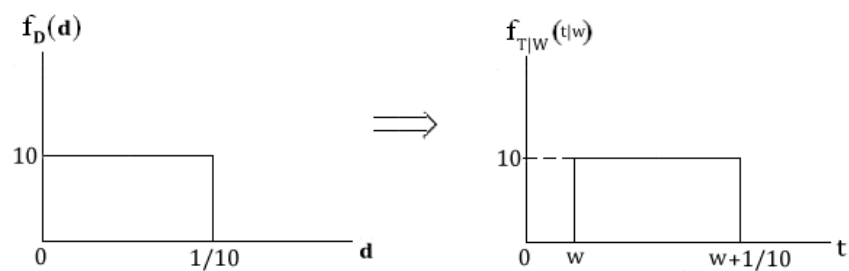
(δ) Ζητούμε την πιθανότητα $P(X < W)$. Τα σημεία (x, w) που ικανοποιούν τη σχέση φαίνονται πολύ εύκολα από το σχήμα:



Συνεπώς,

$$\begin{aligned} P(X < W) &= \frac{1}{3} \times (\text{Εμβαδόν Τραπεζίου } ABED) + \frac{1}{6} \times (\text{Εμβαδόν Τριγώνου } EGD) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2+1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{6} \times \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{7}{12} = 0.58. \end{aligned}$$

(ε-ι) Από την εκφώνηση ισχύει ότι $T = W + D$. Επομένως, δεδομένου του $\{W = w\}$, $T = D + w$. Γνωρίζουμε ότι αν $X \sim f_X(x)$ και $Y = aX + b$, τότε $Y \sim f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X(\frac{y-b}{a})$. Εδώ έχουμε ότι $a = 1, b = w$. Συνεπώς, $f_{T|W}(t|w) = f_D(t - w)$. Αλλά $D \sim U[0, 1/10]$.



$$f_{T|W}(t|w) = \begin{cases} 10, & w \leq t \leq w + \frac{1}{10} \text{ και } 2 \leq w \leq 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άρα, η δεσμευμένη σ.π.π. είναι ομοιόμορφη στο $[w, w + \frac{1}{10}]$.

(ε-ii) Κάνοντας χρήση του κανόνα του Bayes:

$$f_{W|T}(w|t=3) = \frac{f_{W,T}(w,3)}{f_T(3)} = \frac{f_{T|W}(3|w) \cdot f_W(w)}{f_T(3)}$$

Έχουμε

$$f_{T|W}(3|w) \cdot f_W(w) = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5, \quad 3 - \frac{1}{10} \leq w \leq 3$$

Επίσης

$$f_T(3) = \int_{u=3-\frac{1}{10}}^3 f_{T|W}(3|u) f_W(u) du = 5 \left[3 - \left(3 - \frac{1}{10} \right) \right] = \frac{1}{2}$$

Επομένως

$$f_{W|T}(w|3) = \begin{cases} 10, & 3 - \frac{1}{10} \leq w \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Τελικά

$$P(W < 2.92 | t = 3) = \int_{-\infty}^{2.92} f_{W|T}(w|3) dw = 10 \cdot (2.92 - 2.90) = 0.2$$

(στ) Ζητάμε την πιθανότητα $P(Z > \frac{5}{60})$, όπου $Z \sim N(1/60, 4/3600)$.

Εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$P(Z > \frac{5}{60}) = 1 - P(Z \leq \frac{5}{60}) = 1 - P\left(\frac{Z - 1/60}{2/60} < \frac{5/60 - 1/60}{2/60}\right) = 1 - \Phi(2) = 0.0028$$

(ζ-i) Καθώς $W \sim U[2, 4]$, η τ.μ. $S = \frac{24}{W}$ παίρνει τιμές μεταξύ 6 και 12 (σε χιλιάδες ευρώ).

Για $6 \leq s \leq 12$:

$$F_S(s) = P(S \leq s) = P\left(\frac{24}{W} \leq s\right) = P\left(W \geq \frac{24}{s}\right) = \int_{24/s}^4 \frac{1}{2} dw = \frac{1}{2} \left(4 - \frac{24}{s}\right) = 2 - \frac{12}{s}$$

Τελικά:

$$F_S(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 6 \\ 2 - \frac{12}{s}, & 6 \leq s \leq 12 \\ 1, & s \geq 12 \end{cases}$$

Παραγωγίζοντας ως προς s ,

$$f_S(s) = \frac{dF_S(s)}{ds} = \begin{cases} 12/s^2, & 6 \leq s \leq 12 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(ζ-ii) $P(S > 10) = 1 - P(S \leq 10) = 1 - F_S(10) = 1 - \left(2 - \frac{12}{10}\right) = 0.2$

Θέμα 2.

(α) Καθώς ο μικροεπεξεργαστής συνεχίζει να λειτουργεί μετά από 5 χρόνια, με βεβαιότητα προέρχεται από τη γραμμή #2. Επομένως, η διάρκεια ζωής του ακολουθεί εκθετική κατανομή με $\lambda = 0.1$ (έτη)⁻¹, για την οποία έχουμε δείξει την έλλειψη μνήμης.

Συνεπώς, αν $L \equiv$ διάρκεια ζωής,

$$P(L \geq 5 + 3 | L \geq 5) = P(L \geq 3) = e^{-0.1 \cdot 3} = e^{-0.3} = 0.7408.$$

(β) Σε αυτή την περίπτωση, ο μικροεπεξεργαστής μπορεί να προέρχεται είτε από τη γραμμή #1 είτε από τη γραμμή #2. Έστω $B = \{\text{ο μικροεπεξεργαστής προέρχεται από τη γραμμή \#1}\}$. Χρησιμοποιώντας το Θ.Ο.Π.:

$$P(L \geq c) = P(L \geq c | B) \cdot P(B) + P(L \geq c | B^c) \cdot P(B^c) = \frac{1}{2} P(L \geq c | B) + \frac{1}{2} P(L \geq c | B^c)$$

Ισχύει ότι $f_{L|B}(l) \sim U[0, 2]$ και $f_{L|B^c}(l) \sim \exp(\lambda = 0.1)$.

Συνεπώς,

$$P(L \geq c) = \begin{cases} 1, & c \leq 0 \\ \frac{1}{2}(2-c)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-0.1c}, & 0 \leq c \leq 2 \\ \frac{1}{2}e^{-0.1c}, & c \geq 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$P(L \geq c) = \begin{cases} 1, & c \leq 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{c}{4} + \frac{1}{2}e^{-0.1c}, & 0 \leq c \leq 2 \\ \frac{1}{2}e^{-0.1c}, & c \geq 2 \end{cases}$$

Επομένως,

$$P(L \geq 1 + 3 | L \geq 1) = \frac{P(L \geq 4)}{P(L \geq 1)} = \frac{\frac{1}{2}e^{-0.1 \cdot 4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{-0.1 \cdot 1}} = \frac{e^{-0.4}}{\frac{1}{2} + e^{-0.1}} = 0.4772$$

Θέμα 3.

(α) $P(Z \leq 9) = P((X + Y)^2 \leq 9) = P(-3 \leq X + Y \leq 3)$.

Αλλά $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(1, 3)$ και συνεπώς $X + Y \sim N(0 + 1, 1 + 3) \equiv N(1, 4)$.

Επομένως, $P(Z \leq 9) = P\left(\frac{-3-1}{2} \leq \frac{X+Y-1}{2} \leq \frac{3-1}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) - 1$.

(β) Διαβάζουμε απ' ευθείας από το Σχήμα 1:

$$(\beta\text{-i}) P(X \leq 10) = F_X(10) = 1$$

$$(\beta\text{-ii}) P(X \geq -7) = 1 - P(X < -7) = 1 - F_X(-7) = 1 - 0.25 = 0.75$$

$$(\beta\text{-iii}) P(|X| < 10) = P(-10 < X < 10) = F_X(10^-) - F_X(-10^-) = 0.75 - 0.25 = 0.5$$

$$(\beta\text{-iv}) P(X^2 \geq 16) = P(X \geq 4 \cup X \leq -4) = P(X \geq 4) + P(X \leq -4) \\ = 1 - P(X < 4) + P(X \leq -4) = 1 - F_X(4) + F_X(-4) = 1 - 0.7 + 0.3 = 0.6$$