

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
4 Φεβρουαρίου 2011 - Διάρκεια: 3 Ώρες

Θέμα 1 - 70 μονάδες. Ο Χρήστος και ο Μηνάς παίρνουν μέρος στον κλασσικό Μαραθώνιο και οι χρόνοι τερματισμού τους μοντελοποιούνται από δύο τυχαίες μεταβλητές. Έστω X και W οι χρόνοι (σε ώρες) του Χρήστου και του Μηνά, αντίστοιχα. Οι χρόνοι X και W είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους τ.μ. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου, X , του Χρήστου είναι:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2c & 2 \leq x < 3 \\ c & 3 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου c είναι μία σταθερά. Ο χρόνος, W , του Μηνά είναι ομοιόμορφα κατανεμημένος μεταξύ 2 και 4 ωρών, $W \sim U[2, 4]$.

(α) (5 μονάδες) Δώστε τη γραφική παράσταση των σ.π.π. των X και W . Υπολογίστε τη σταθερά c .

(β) (5 μονάδες) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $E[X]$, και τη διασπορά, $var(X)$, της τ.μ. X .

(γ) (10 μονάδες) Υπολογίστε την από κοινού σ.π.π. των X και W , $f_{X,W}(x, w)$, και δώστε τη γραφική της παράσταση.

(δ) (10 μονάδες) Ποια είναι η πιθανότητα να τερματίσει πρώτος ο Χρήστος;

(ε) Ο Μηνάς χρησιμοποιεί ένα ρολόι για να χρονομετρήσει τον εαυτό του. Δυστυχώς το ρολόι είναι ελαττωματικό και υπερεκτιμά τον χρόνο κατά ένα διάστημα, D , το οποίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο μεταξύ 0 και 1/10 ωρών, $D \sim U[0, 1/10]$, και είναι ανεξάρτητο από τον πραγματικό του χρόνο, W . Έστω T ο χρόνος που μετρά το ρολόι του Μηνά.

(ε-i) (5 μονάδες) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π.π. $f_{T|W}(t|w)$.

(ε-ii) (10 μονάδες) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π.π. $f_{W|T}(w|t = 3)$. Ποια είναι η πιθανότητα ότι ο πραγματικός χρόνος τερματισμού του Μηνά είναι μικρότερος από 2.92 ώρες δεδομένου ότι το ρολόι του δείχνει $t = 3$ ώρες;

(στ) (10 μονάδες) Ο Χρήστος επίσης χρησιμοποιεί ένα ρολόι για να χρονομετρήσει τον εαυτό του. Δυστυχώς και το δικό του ρολόι είναι ελαττωματικό: Προσθέτει θόρυβο Z που ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή $\mu = 1/60$ ώρες και διασπορά $\sigma^2 = 4/3600$. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι το ρολόι του Χρήστου υπερεκτιμά τον πραγματικό χρόνο τερματισμού του περισσότερο από 5 λεπτά της ώρας.

(ζ) Ο Μηνάς διαθέτει ένα σπόνσορα για τη συμμετοχή του στο Μαραθώνιο. Αν ο Μηνάς τερματίσει σε w ώρες, ο σπόνσορας τον πληρώνει $\frac{24}{w}$ χιλιάδες ευρώ. Ορίζουμε την τ.μ. $S = \frac{24}{W}$.

(ζ-i) (10 μονάδες) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_S(s)$, και τη σ.π.π. $f_S(s)$.

(ζ-ii) (5 μονάδες) Ποια η πιθανότητα ότι ο Μηνάς κερδίζει περισσότερα από 10 χιλιάδες ευρώ;

Θέμα 2 - 15 μονάδες.

Ένα εργοστάσιο παράγει μικροεπεξεργαστές σε δύο γραμμές παραγωγής. Οι δύο γραμμές παράγουν το ίδιο πλήθος μικροεπεξεργαστών. Όλοι οι μικροεπεξεργαστές μοιάζουν εξωτερικά μεταξύ τους, αλλά η διάρκεια ζωής ενός μικροεπεξεργαστή που προέρχεται από τη γραμμή #1 είναι ομοιόμορφα κατανομημένη μεταξύ 0 και 2 ετών ενώ η διάρκεια ζωής ενός μικροεπεξεργαστή που προέρχεται από τη γραμμή #2 είναι εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο $\lambda = 0.1$ (έτη) $^{-1}$.

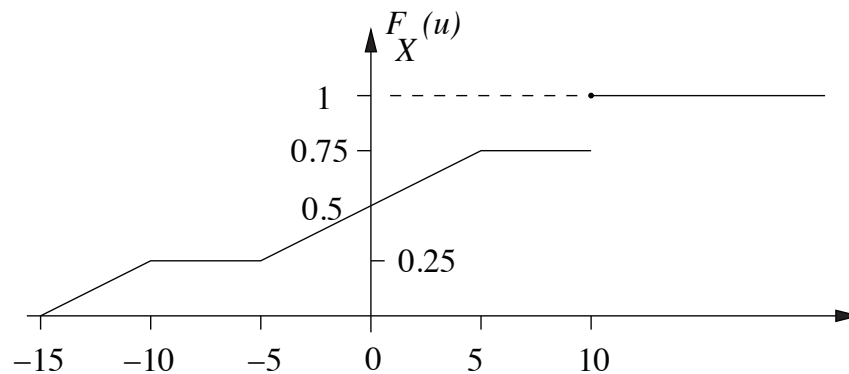
(α) (7 μονάδες) Η Δέσποινα αγόρασε ένα μικροεπεξεργαστή ο οποίος μετά από 5 χρόνια συνεχίζει να λειτουργεί. Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα ότι θα λειτουργήσει για τουλάχιστον 3 χρόνια ακόμα;

(β) (8 μονάδες) Ο Κώστας αγόρασε ένα μικροεπεξεργαστή ο οποίος μετά από 1 χρόνο συνεχίζει να λειτουργεί. Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα ότι θα λειτουργήσει για τουλάχιστον 3 χρόνια ακόμα;

Θέμα 3 - 15 μονάδες.

(α) (7 μονάδες) Έστω η τ.μ. $Z = (X + Y)^2$, όπου X και Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους Γκαουσιανές τ.μ. με $\mu_X = 0$, $\mu_Y = 1$, $\text{var}(X) = 1$, και $\text{var}(Y) = 3$. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Z \leq 9)$ εκφράζοντας την απάντησή σας με βάση τιμές της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, Φ .

(β) (8 μονάδες) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(u)$ της τ.μ. X φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(u)$ της τ.μ. X .

Υπολογίστε τις ακόλουθες πιθανότητες:

(β-i) (2 μονάδες) $P(X \leq 10)$.

(β-ii) (2 μονάδες) $P(X \geq -7)$.

(β-iii) (2 μονάδες) $P(|X| < 10)$.

(β-iv) (2 μονάδες) $P(X^2 \geq 16)$.