

**ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2010**  
**Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**

Λύσεις Έκτης Σειράς Ασκήσεων

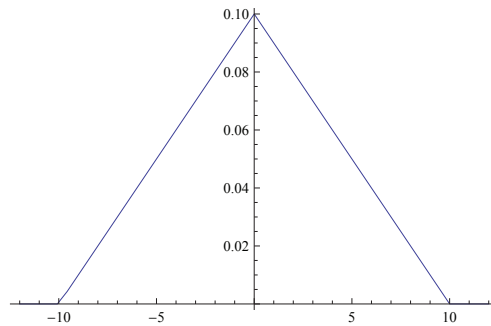
Ημερομηνία Ανάθεσης: 16/12/2010

Ημερομηνία Παράδοσης: 14/01/2011

**Άσκηση 1.**

**(α)** Το εμβαδόν κάτω από την  $f_X(x)$  πρέπει να είναι μονάδα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{2} \times 20 \times a = 10a = 1 \Rightarrow a = 0.1.$$



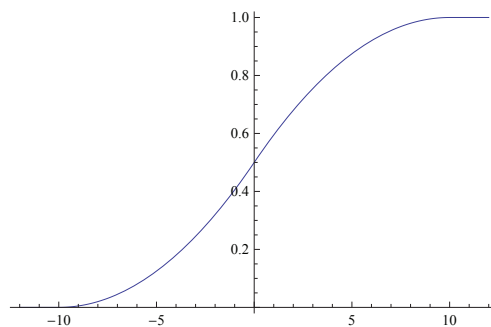
Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της  $f_X(x)$ .

**(β)** Εφόσον η  $f_X(x)$  είναι άρτια συνάρτηση, τότε  $E[X] = 0$ . Επιπλέον:

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - 0 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = 2 \int_0^{10} \frac{10-x}{100} x^2 dx = \frac{50}{3}.$$

**(γ)** Ομοίως η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 0, & x < -10 \\ 0.005(x+10)^2, & x \in [-10, 0] \\ 1 - 0.005(x-10)^2, & x \in [0, 10] \\ 1, & x > 10 \end{cases}$$



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση της  $F_X(x)$ .

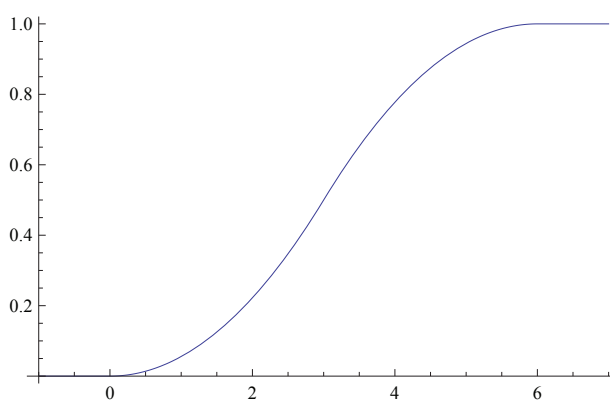
**Άσκηση 2.**

(α) Από τις ιδιότητες μιας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας έχουμε ότι:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_0^3 cx dx + \int_3^6 c(6-x) dx = 9c \Rightarrow c = 1/9.$$

(β) Επειδή έχουμε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή, θα ισχύει ότι:  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$ . Οπότε θα έχουμε:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{9} \int_0^x u du = \frac{x^2}{18}, & 0 \leq x < 3 \\ \frac{1}{9} \int_0^3 u du + \frac{1}{9} \int_3^x (6-u) du = \frac{1}{2} - \frac{1}{18} (6-u)^2 \Big|_3^x = 1 - \frac{(6-x)^2}{18}, & 3 \leq x < 6 \\ 1, & x \geq 6 \end{cases}$$



Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση της  $F_X(x)$ .

Η γραφική παράσταση της  $F_X(x)$  φαίνεται στο σχήμα 3.

(γ) Είναι εύκολα αντιληπτό ότι η  $F_X(x)$  είναι μη φθίνουσα και ότι  $0 \leq F_X(x) \leq 1$  για κάθε τιμή του  $x$ , τόσο από το παραπάνω σχήμα όσο και από την ανάλυση των συναρτήσεων  $x^2/18$  και  $1 - (6-x)^2/18$  στα διαστήματα  $[0, 3]$  και  $[3, 6]$ , αντίστοιχα. Επιπλέον, ισχύει ότι:  $F_X(-\infty) = F_X(0) = 0$  και  $F_X(+\infty) = F_X(6) = 1$ . Τέλος, είναι εύκολα αντιληπτό ότι η  $F_X(x)$  είναι συνεχής παντού, ακόμη και στα σημεία  $x = 0$ ,  $x = 3$  και  $x = 6$ .

(δ) Έχουμε ότι:

$$P(A) = P(X > 3) = 1 - F_X(3) = 0.5.$$

Παρομοίως:

$$P(B) = P(1.5 \leq X \leq 9) = P(X \leq 9) - P(X < 1.5) = F_X(9) - F_X(1.5^-) = 1 - 0.125 = 0.875.$$

(ε) Η τομή των  $A$  και  $B$  είναι το γεγονός  $\{3 < X \leq 9\}$ . Άρα,

$$P(A \cap B) = P(3 < X \leq 9) = P(X > 3) = 0.5 = P(A) \neq P(A)P(B)$$

Επομένως, τα δύο γεγονότα δεν είναι ανεξάρτητα.

**Άσκηση 3.**

Η πιθανότητα για οποιοδήποτε γεγονός να συμβεί ισούται με το εμβαδόν κατώ από την σ.π.π.. Παρατηρήστε ότι  $X^2 - 12X + 35 = (X - 5)(X - 7)$ . Οπότε,  $X^2 - 12x + 35 > 0$  αν και μόνο αν  $\{X > 7\} \cup \{X < 5\}$ . Εφόσον  $X \sim U[2, 10]$ ,  $f_X(x) = 1/8$  για  $x \in [2, 10]$  και  $f_X(x) = 0$  αλλού. Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X^2 - 12X + 35 > 0) &= P(\{X > 7\} \cup \{X < 5\} \cap \{2 \leq X \leq 10\}) \\ &= P(\{2 \leq X < 5\} \cup \{7 < X \leq 10\}) \\ &= P(\{2 \leq X < 5\}) + P(\{7 < X \leq 10\}) \\ &= 1/8 \times (5 - 2) + 1/8 \times (10 - 7) \\ &= 1/8 \times 3 + 1/8 \times 3 = 0.75. \end{aligned}$$

**Άσκηση 4.**

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή  $X$  είναι ο χρόνος ζωής ενός τυχαία επιλεγμένου κυκλώματος. Ορίζουμε τα εξής γεγονότα:

$A_t$  : Το κύκλωμα εξακολουθεί να λειτουργεί κατά τη χρονική στιγμή  $t$ .

$B$  : Το κύκλωμα είναι "κακό".

$G$  : Το κύκλωμα είναι "καλό".

Κάνοντας χρήση των εκθετικών κατανομών,

$$\begin{aligned} P(A_t | G) &= \int_t^\infty \alpha e^{-\alpha x} dx = e^{-\alpha t} \\ P(A_t | B) &= \int_t^\infty 1000\alpha e^{-1000\alpha x} dx = e^{-1000\alpha t}. \end{aligned}$$

(α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας,

$$P(A_t) = P(G)P(A_t | G) + P(B)P(A_t | B) = pe^{-\alpha t} + (1 - p)e^{-1000\alpha t}.$$

(β) Μας ζητείται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $X$ . Από το υποερώτημα (α), έχουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της  $X$ :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(A_x) = 1 - pe^{-\alpha x} - (1 - p)e^{-1000\alpha x}.$$

Επομένως:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = p\alpha e^{-\alpha x} + (1 - p)1000\alpha e^{-1000\alpha x}.$$

(γ) Κάνοντας χρήση του ορισμού της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(B | A_t) = \frac{P(B \cap A_t)}{P(A_t)}.$$

Επιπλέον,  $P(B \cap A_t) = P(B)P(A_t | B) = (1 - p)e^{-1000\alpha t}$ . Επομένως,

$$P(B | A_t) = \frac{(1 - p)e^{-1000\alpha t}}{pe^{-\alpha t} + (1 - p)e^{-1000\alpha t}} = \frac{1}{(p(1 - p))e^{999\alpha t} + 1}.$$

Προκειμένου να ισχύει  $P(B | A_t) < 0.01$  όταν  $p/(1 - p) = 9$ , πρέπει να ισχύσει  $e^{999\alpha t} > 11$ , το οποίο δίνει  $t > (\ln 11)/(999\alpha)$ .

**Άσκηση 5.**

Δεδομένου ότι οι  $X$  και  $Y$  είναι από κοινού Γκαουσιανές, η  $W = X + Y$  είναι επίσης Γκαουσιανή, με

$$E[W] = E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{var}(W) &= E[W^2] - (E[W])^2 = E[(X + Y)^2] - 0 \\ &= E[X^2 + 2XY + Y^2] = E[X^2] + 2E[XY] + E[Y^2] = 1 + 2 \times 0.5 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Άρα

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-w^2/6}.$$

Δεδομένου ότι  $Z = |W|$ , έχουμε ότι η  $Z$  παίρνει μη αρνητικές τιμές. Για  $z > 0$ ,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(|W| \leq z) = P(-z \leq W \leq z) \\ &= F_W(z) - F_W(-z) = F_W(z) - (1 - F_W(z)) = 2F_W(z) - 1. \end{aligned}$$

Συνεπώς,  $f_Z(z) = \frac{\partial}{\partial z} F_Z(z) = 2f_W(z)$  για  $z > 0$  και  $f_Z(z) = 0$  για  $z < 0$ :

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{6\pi}} e^{-z^2/6} & z > 0 \\ 0 & z \leq 0. \end{cases}$$

**Άσκηση 6.**

(α)

$$\begin{aligned} P\left\{\sum_{i=1}^4 X_i > 0\right\} &= P\left\{\frac{\sum_{i=1}^4 X_i - 6}{\sqrt{24}} > \frac{-6}{\sqrt{24}}\right\} \\ &= 1 - \Phi(-1.2247) = 1 - (1 - \Phi(1.2247)) \\ &= \Phi(1.2247) = 0.8897. \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} P\left\{\sum_{i=1}^4 X_i > 0 \mid \sum_{i=1}^2 X_i = -5\right\} &= P\{X_3 + X_4 > 5\} \\ &= P\left\{\frac{X_3 + X_4 - 3}{\sqrt{12}} > 2/\sqrt{12}\right\} \\ &= 1 - \Phi(0.5774) = 0.2818. \end{aligned}$$

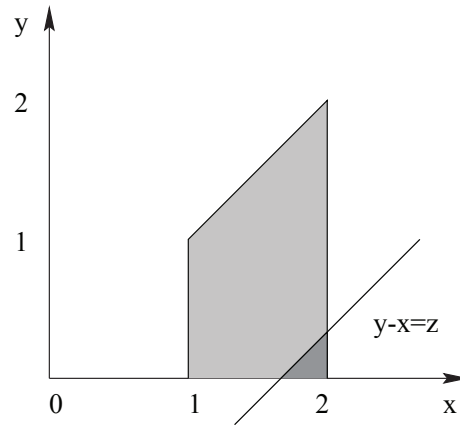
(γ)

$$\begin{aligned} P\left\{\sum_{i=1}^4 X_i > 0 \mid X_i = 5\right\} &= P\{X_2 + X_3 + X_4 > -5\} \\ &= P\left\{\frac{X_2 + X_3 + X_4 - 4.5}{\sqrt{18}} > -9.5/\sqrt{18}\right\} \\ &= 1 - \Phi(-2.239) = 0.9874. \end{aligned}$$

**Άσκηση 7.**

(α) Στο Σχήμα 4 φαίνεται η περιοχή όπου η  $f_{X,Y}(x,y)$  παίρνει μη μηδενικές τιμές. Η από κοινού σ.π.π. πρέπει να έχει ολοκλήρωμα 1:

$$\int_{x=1}^{x=2} \int_{y=0}^{y=x} ax dy dx = \frac{7}{3}a = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{7}.$$



Σχήμα 4: Το πεδίο τιμών των  $X$  και  $Y$ .

(β)

$$f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y) dy = \begin{cases} \int_1^2 \frac{3}{7} x dx & 0 \leq y \leq 1 \\ \int_y^2 \frac{3}{7} x dx & 1 < y \leq 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} \frac{9}{14} & 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{13}{14} (4 - y^2) & 1 < y \leq 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(γ)

$$f_{X|Y}\left(x \middle| \frac{3}{2}\right) = \frac{f_{X,Y}\left(x, \frac{3}{2}\right)}{f_Y\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{8}{7}x, \text{ για } 3/2 \leq x \leq 2 \text{ και } 0 \text{ αλλού.}$$

Επομένως,

$$E\left[\frac{1}{X} \middle| Y = \frac{3}{2}\right] = \int_{3/2}^2 \frac{1}{x} \frac{8}{7} x dx = \frac{4}{7}.$$

(δ) Θα βρούμε πρώτα την α.σ.κ. και θα την παραγωγίσουμε για να βρούμε την ζητούμενη σ.π.π.

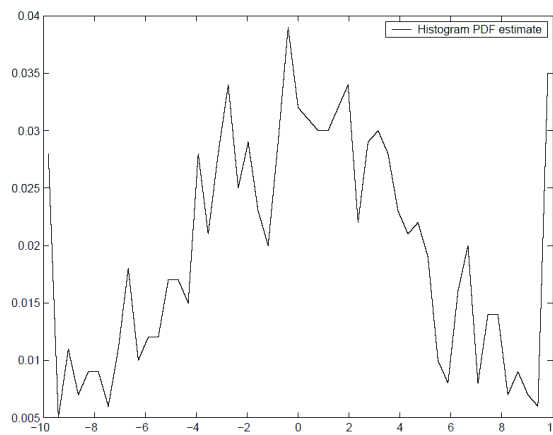
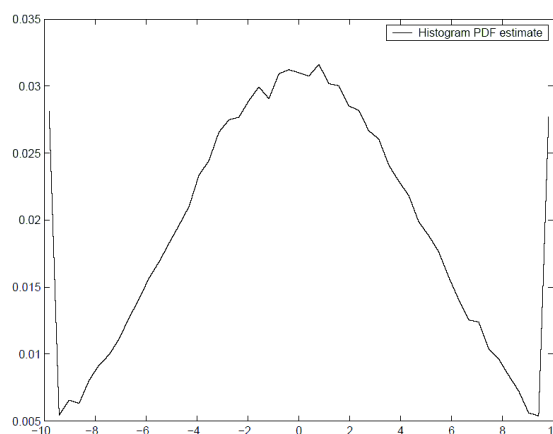
$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) \\ &= P(Y - X \leq z) \\ &= \begin{cases} 0, & z < -2 \\ \int_{x=-z}^{x=2} \int_{y=0}^{y=x+z} \frac{3}{7} x dy dx = \frac{8}{7} + \frac{6}{7}z - \frac{1}{14}z^3, & -2 \leq z \leq -1 \\ \int_{x=1}^{x=2} \int_{y=0}^{y=x+z} \frac{3}{7} x dy dx = 1 + \frac{9}{14}z, & -1 < z \leq 0 \\ 1, & 0 < z \end{cases} \end{aligned}$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \begin{cases} \frac{6}{7} - \frac{3}{14}z^2 & -2 \leq z \leq -1 \\ \frac{9}{14} & -1 < z \leq 0 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

**Άσκηση 8.****(α)** Διακρίνουμε 4 περιπτώσεις ανάλογα με την τιμή της  $Y$ .

- $Y > 10$  ή  $Y < -10$  τότε  $f_Y(y) = 0$
- $P(Y = -10) = P(X \leq -10) = P\left(\frac{X-0}{5} \leq -\frac{10}{5}\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$
- $P(Y = 10) = P(X \geq 10) = P\left(\frac{X-0}{5} \geq \frac{10}{5}\right) = 1 - \Phi(2)$
- $|Y| < 10$  τότε  $f_Y(y) = f_X(x)|_{x=y} = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{50\pi}}$

**(β)** Η προσέγγιση της  $\sigma.π.π.$  της  $Y$  με  $N = 10^3$  και  $N = 10^5$  σημεία φαίνεται στα σχήματα 5 και 6 αντίστοιχα. Όπως παρατηρούμε στα διαγράμματα, όσο λιγότερα σημεία έχουμε, τόσο λιγότερα σημεία πέφτουν μέσα στα ισαπέχοντα bins και άρα τόσο χειρότερη είναι η μέτρηση της σχετικής συχνότητας και η προσέγγιση της  $\sigma.π.π.$  της τυχαίας μεταβλητής.

Σχήμα 5: Η προσέγγιση της  $f_Y(y)$  με  $N = 10^3$ .Σχήμα 6: Η προσέγγιση της  $f_Y(y)$  με  $N = 10^5$ .