ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 17/12/2010 Ημερομηνία Παράδοσης: 14/1/2011

Θέματα: Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές.

Άσκηση 1. Η συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ($\sigma.\pi.\pi.$):

$$f_X(x) = \begin{cases} a(1-0.1|x|) & \text{για } -10 \leq x \leq 10, \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου a μία σταθερά.

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της $\sigma.\pi.\pi.$ και υπολογίστε το a.
(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. X.
(γ) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής ($\alpha.\sigma.\kappa.$), $F_X(x)$, της X και δώστε τη γραφική της παράσταση.

Άσκηση 2. Η ποσότητα ψωμιού (σε χιλιάδες κιλά) που πουλάει ένα αρτοποιείο κατά τη διάρκεια μιας ημέρας είναι συνεχής τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x < 3 \\ c(6-x) & 3 \leq x < 6 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c.
(β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(x)$, της τ.μ. X.
(γ) Δώστε τη γραφική παράσταση της $F_X(x)$ και δείξτε ότι είναι μία έγκυρη $\alpha.\sigma.\kappa.$
(δ) Ποια η πιθανότητα ότι σε μία ημέρα θα πουληθούν: (ι) περισσότερα από 300 κιλά ψωμί, (ιι) μεταξύ 150 και 900 κιλών ψωμί;
(ε) Αν A και B είναι τα γεγονότα (ι) και (ιι), αντίστοιχα, είναι τα A και B ανεξάρτητα;

Άσκηση 3. Δίδεται η τ.μ. $X \sim U[2,\ 10]$, δηλαδή, η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[2,\ 10]$. Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $X^2 - 12X + 35 > 0$.

Άσκηση 4. Ένα κύκλωμα υπολογιστή έχει διάρκεια ζωής η οποία αποτελεί μία συνεχή τυχαία μεταβλητή. Έστω ότι ένα εργοστάσιο παράγει ένα μείγμα "καλών" και "κακών" κυκλωμάτων. Για κάποια θετική σταθερά α, η διάρκεια ζωής των καλών κυκλωμάτων είναι εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο α ενώ η διάρκεια ζωής των κακών κυκλωμάτων είναι εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο 1000α. Έστω ότι το ποσοστό των καλών κυκλωμάτων είναι p και ότι το ποσοστό των κακών κυκλωμάτων είναι $1-p$.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ένα τυχαία επιλεγμένο κύκλωμα εξακολουθεί να λειτουργεί μετά από t μονάδες χρόνου.

(β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διάρκειας ζωής ενός τυχαία επιλεγμένου κυκλώματος.

(γ) Για να γίνει διαλογή των καλών κυκλωμάτων, κάθε κύκλωμα δοκιμάζεται για t μονάδες χρόνου και μόνο εκείνα τα οποία δεν χαλάνε κατά τη δοκιμή αποστέλλονται στους πελάτες. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ένας πελάτης λαμβάνει ένα ¨*κακό*¨ κύκλωμα ως συνάρτηση των παραμέτρων α, p, και t. Αν $p = 0.9$, πόσο πρέπει να διαρκεί η δοκιμή (δηλαδή, πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το t) ώστε η πιθανότητα να στέλνονται κακά κυκλώματα στους πελάτες να είναι μικρότερη από 1%;

Άσκηση 5. Οι τ.μ. X και Y είναι από κοινού Γκαουσιανές με μέση τιμή μηδέν και διασπορά μονάδα. Επίσης, ισχύει ότι $E[XY] = 0.5$. Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. $W = X + Y$ και $Z = |W|$.

Άσκηση 6. Ένα στατιστικό μοντέλο που έχει προταθεί για το επαγγελματικό πρωτάθλημα μπάσκετ των ΗΠΑ προβλέπει ότι όταν συναντώνται δύο σχετικά ισοδύναμες ομάδες, ο αριθμός των πόντων που σκοράρει σε μία περίοδο η εντός έδρας ομάδα μείον τον αριθμό των πόντων που σκοράρει η φιλοξενούμενη ομάδα ακολουθεί κανονική τ.μ. με μέση τιμή 1.5 και διασπορά 6. Επίσης, το μοντέλο υποθέτει ότι οι διαφορές σκοραρίσματος κατά τις 4 περιόδους που διαρκεί ένας αγώνας είναι ανεξάρτητες τ.μ.

(α) Ποια η πιθανότητα να κερδίσει η εντός έδρας ομάδα;

(β) Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει η εντός έδρας ομάδα δεδομένου ότι στο ημίχρονο είναι πίσω στο σκορ κατά 5 πόντους;

(γ) Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει η εντός έδρας ομάδα δεδομένου ότι στο τέλος της πρώτης περιόδου προηγείται με 5 πόντους;

Άσκηση 7. Οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} ax & \text{για } 1 \le x \le 2 \text{ και } 0 \le y \le x \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου a μία σταθερά.

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση του πεδίου τιμών των τ.μ. X και Y και υπολογίστε το a.

(β) Υπολογίστε την περιθωριακή $\sigma.\pi.\pi.$ της τ.μ. Y, $f_Y(y)$.

(γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη $\sigma.\pi.\pi.$ της τ.μ. X δεδομένου του $Y = 3/2$, $f_{X|Y}(x|\frac{3}{2})$, και μετά την δεσμευμένη μέση τιμή του $\frac{1}{X}$ δεδομένου του $Y = 3/2$, $E[\frac{1}{X}|Y = 3/2]$.

(δ) Η τ.μ. Z ορίζεται ως $Z = Y - X$. Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Z(z)$, και τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_Z(z)$, της τ.μ. Z.

Άσκηση 8. Δειγματοληπτούμε το σήμα εξόδου ενός μικροφώνου και θεωρούμε τις μετρήσεις μας ως πειραματικές τιμές μιας Γκαουσιανής τυχαίας μεταβλητής X με μηδενική μέση τιμή ($\mu_X = 0$) και τυπική απόκλιση ίση με 5 Volts ($\sigma_X = 5$). Η έξοδος του μικροφώνου τροφοδοτείται σε ένα ενισχυτή. Για την αποφυγή της υπερφόρτωσης του ενισχυτή, χρησιμοποιούμε ένα κύκλωμα αποκοπής (clipping circuit):

$$Y = g(X) = \begin{cases} X, & |X| \leq 10 \\ -10, & X < -10 \\ 10, & X > 10 \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε αναλυτικά τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. Y.

(β) Γράψτε ένα απλό πρόγραμμα (σε MATLAB) για να δημιουργήσετε $N = 10^3$ πειραματικές τιμές των τ.μ. X και Y. Χρησιμοποιείστε τη συνάρτηση randn() της MATLAB για τη δημιουργία των τιμών της τ.μ. X. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση hist() της MATLAB δώστε τη γραφική παράσταση της προσέγγισης της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. Y (το λεγόμενο και *ιστόγραμμα* της Y) και συγκρίνετέ την με την ακριβή γραφική παράσταση της $\sigma.\pi.\pi.$ της Y που έχετε υπολογίσει στο (α).

(γ) Επαναλάβετε το βήμα (β) για $N = 10^5$. Τι παρατηρείτε στην προσέγγιση της $\sigma.\pi.\pi.$ της Y;

Υπόδειξη: Ένα MATLAB primer μπορείτε να βρείτε στην ιστοσελίδα του μαθήματος. Για την γραφική παράσταση του ιστογράμματος, χρησιμοποιείστε τις ακόλουθες εντολές:

```
miny = min(y);
maxy = max(y);
NumBins = 51;
h = hist(y,NumBins);
for k=1:NumBins,
bincenters(k) = miny + ((maxy-miny)/NumBins)*(k-1/2);
end
h = h / sum(h); % normalize PDF estimate
plot(bincenters,h);
legend('Histogram PDF estimate');
```