

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 15/11/2010

Ημερομηνία Παράδοσης: 24/11/2010

Άσκηση 1.

(α) Η τ.μ. R_i είναι μια *Bernoulli* τ.μ. με $p = 1/3$. Η *PMF* της R_i είναι:

$$p_{R_i}(r) = \begin{cases} 2/3, & \text{αν } r = 0, \\ 1/3, & \text{αν } r = 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Η μέση τιμή και η διασπορά της R_i είναι:

$$E[R_i] = p = \frac{1}{3},$$

και

$$\text{var}(R_i) = p(1-p) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

(β) Ορίζουμε την τ.μ. X ως το χρόνο διάρκειας της διαδρομής του Στέφανου σε λεπτά. Τότε:

$$X = 18 + \sum_{i=1}^5 R_i,$$

όπου η τ.μ. $Y = \sum_{i=1}^5 R_i$ είναι προφανώς διωνυμική με παραμέτρους $n = 5$ και $p = 1/3$: $Y \sim \Delta(5, 1/3)$. Συνεπώς, η τ.μ. X παίρνει τις τιμές $\{18, 19, 20, 21, 21, 23\}$ όταν η τ.μ. Y παίρνει τις τιμές $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ με τις αντίστοιχες διωνυμικές πιθανότητες. Λέμε ότι η τ.μ. X είναι *μετατοπισμένη διωνυμική* με $n = 5$ και $p = 1/3$. Η *PMF* της X είναι:

$$p_X(k) = \begin{cases} \binom{5}{k-18} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-18} \left(\frac{2}{3}\right)^{23-k}, & \text{αν } k \in \{18, 19, 20, 21, 21, 23\}, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Η μέση τιμή και η διασπορά της X είναι:

$$E[X] = E[18 + \sum_{i=1}^5 R_i] = 18 + 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{59}{3},$$

και

$$\text{var}(X) = \text{var}(18 + \sum_{i=1}^5 R_i) = \text{var}(\sum_{i=1}^5 R_i) = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{9}.$$

(γ) Προφανώς, η τ.μ. N είναι διωνυμική με παραμέτρους $n = 5$ και $p = 1/3$: $N \sim \Delta(5, 1/3)$. Επομένως $P(N = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^5$ και $P(N = 1) = \binom{5}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1$. Δεδομένου ότι $X \leq 19$, τότε $N = 0$ ή $N = 1$. Επομένως, πρέπει να υπολογίσουμε τη δεσμευμένη ΣΠ, $p_{N/X \leq 19}(n)$, για $n = 0$ και $n = 1$. Έχουμε:

$$p_{N/X \leq 19}(n) = \frac{P(N = n \cap X \leq 19)}{P(X \leq 19)}.$$

Από το υποερώτημα (β) έχουμε ότι

$$P(X \leq 19) = p_X(18) + p_X(19) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \binom{5}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1.$$

Επίσης,

$$P(N = 0 \cap X \leq 19) = P(N = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

και

$$P(N = 1 \cap X \leq 19) = P(N = 1) = \binom{5}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1.$$

Έτσι τελικά:

$$P_{N|X \leq 19}(n|X \leq 19) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5}{\left(\frac{2}{3}\right)^5 + \binom{5}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1} & \text{αν } n = 0, \\ \frac{\binom{5}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1}{\left(\frac{2}{3}\right)^5 + \binom{5}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1} & \text{αν } n = 1, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases} = \begin{cases} 2/7 & \text{αν } n = 0, \\ 5/7 & \text{αν } n = 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Συνεπώς

$$E[N|X \leq 19] = \frac{5}{7}.$$

(δ) Δεδομένου ότι το τελευταίο κόκκινο φανάρι που συνάντησε ο Στέφανος ήταν το τέταρτο, $R_4 = 1$ και $R_5 = 0$.

Πρέπει να υπολογίσουμε την $var(N|\{R_4 = 1\} \cap \{R_5 = 0\})$. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} var(N|\{R_4 = 1\} \cap \{R_5 = 0\}) &= var(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5|\{R_4 = 1\} \cap \{R_5 = 0\}) \\ &= var(R_1 + R_2 + R_3 + 1 + 0|\{R_4 = 1\} \cap \{R_5 = 0\}) \\ &= var(R_1 + R_2 + R_3 + 1) \\ &= 3var(R_1) \\ &= \frac{6}{9}. \end{aligned} \tag{1}$$

(ε) Υπάρχουν συνολικά $\binom{5}{3}$ δυνατοί τρόποι με τους οποίους ο Στέφανος συνάντησε τρία φανάρια.

Υπάρχουν συνολικά $\binom{3}{2}$ δυνατοί τρόποι τα δύο από τα τρία πρώτα φανάρια να ήταν κόκκινα.

Συνεπώς, υπάρχει ένα επιπλέον κόκκινο φανάρι στα τελευταία δύο φανάρια και υπάρχουν συνολικά $\binom{2}{1}$ δυνατοί τρόποι να συμβεί αυτό το γεγονός. Άρα ισχύει:

$$P(2 \text{ από τα } 3 \text{ φανάρια να ήταν κόκκινα} | \text{σύνολο των } 3 \text{ φαναριών}) = \frac{\binom{3}{2} \binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{5}.$$

Άσκηση 2.

(α) Ορίζουμε τις 2 διαδοχικές ρίψεις με W, Z αντίστοιχα. Τα 16 ισοπίθανα ζεύγη φαίνονται στον παρακάτω πίνακα (κάθε κελί περιέχει το ζεύγος (X, Y)).

	Z=1	Z=2	Z=3	Z=4
W = 1	(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)
W = 2	(1,1)	(1,2)	(2,2)	(3,2)
W = 3	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,3)
W = 4	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)

Από τον πίνακα μπορούμε να βρούμε τις συναρτήσεις πιθανότητας για τα X, Y .

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{16}, & k = 0 \\ \frac{3}{16}, & k = 1 \\ \frac{5}{16}, & k = 2 \\ \frac{7}{16}, & k = 3 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

$$p_Y(k) = \begin{cases} \frac{7}{16}, & k = 1 \\ \frac{5}{16}, & k = 2 \\ \frac{3}{16}, & k = 3 \\ \frac{1}{16}, & k = 4 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τις μέσες τιμές αντίστοιχα,

$$E[X] = \frac{1}{16} \cdot 0 + \frac{3}{16} \cdot 1 + \frac{5}{16} \cdot 2 + \frac{7}{16} \cdot 3 = \frac{17}{8},$$

$$E[Y] = \frac{7}{16} \cdot 1 + \frac{5}{16} \cdot 2 + \frac{3}{16} \cdot 3 + \frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{15}{8}.$$

Από την γραμμικότητα της μέσης τιμής έχουμε ότι:

$$E[X - Y] = E[X] - E[Y] = \frac{1}{4}.$$

(β) Από τις συναρτήσεις πιθανότητας στο (α) μπορούμε να υπολογίσουμε τα εξής:

$$E[X^2] = \frac{1}{16} \cdot 0^2 + \frac{3}{16} \cdot 1^2 + \frac{5}{16} \cdot 2^2 + \frac{7}{16} \cdot 3^2 = \frac{43}{8},$$

$$E[Y^2] = \frac{7}{16} \cdot 1^2 + \frac{5}{16} \cdot 2^2 + \frac{3}{16} \cdot 3^2 + \frac{1}{16} \cdot 4^2 = \frac{35}{8}.$$

Άρα, $var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{55}{64}$ και $var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{55}{64}$.

Αφού οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες, οι διασπορά των X και Y δεν είναι κάποιος απλός συνδιασμός των παραπάνω. Μάλιστα, αν $Z = X - Y$ τότε η συνάρτηση πιθανότητας της Z είναι:

$$p_Z(k) = \begin{cases} \frac{4}{16}, & k = -1 \\ \frac{6}{16}, & k = 0 \\ \frac{4}{16}, & k = 1 \\ \frac{2}{16}, & k = 2 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Επομένως $E[Z^2] = \frac{4}{16} \cdot (-1)^2 + \frac{6}{16} \cdot 0^2 + \frac{4}{16} \cdot 1^2 + \frac{2}{16} \cdot 2^2 = 1$, και

$$var(Z) = E[Z^2] - (E[Z])^2 = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}.$$

Άσκηση 3.

(α) Από την έκφραση της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας βλέπουμε ότι υπάρχουν 9 (x, y) υποψήφια ζεύγη με μη μηδενική πιθανότητα. Τα ζεύγη αυτά είναι τα $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (6, 1), (6, 2)$ και $(6, 3)$. Η πιθανότητα ενός ζεύγους είναι ανάλογη του κλάσματος y/x των συντεταγμένων του ζεύγους. Καθώς η πιθανότητα του δειγματοχώρου ισούται με 1, ισχύει:

$$\frac{1}{1}c + \frac{2}{1}c + \frac{3}{1}c + \frac{1}{4}c + \frac{2}{4}c + \frac{3}{4}c + \frac{1}{6}c + \frac{2}{6}c + \frac{3}{6}c = 1.$$

Λύνοντας ως προς c , έχουμε $c = \frac{2}{17}$.

(β) Υπάρχουν 3 σημεία για τα οποία ισχύει $2Y < X$.

$$P(2Y < X) = P(\{(4, 1)\}) + P(\{(6, 1)\}) + P(\{(6, 2)\}) = \frac{2}{17}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6}\right) = \frac{3}{34}.$$

(γ) Υπάρχουν 4 σημεία για τα οποία ισχύει $2Y > X$.

$$P(2Y > X) = P(\{(1, 1)\}) + P(\{(1, 2)\}) + P(\{(1, 3)\}) + P(\{(4, 3)\}) = \frac{2}{17}\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \frac{3}{4}\right) = \frac{27}{34}.$$

(δ) Υπάρχουν 2 σημεία για τα οποία ισχύει $2Y = X$.

$$P(2Y = X) = P(\{(4, 2)\}) + P(\{(6, 3)\}) = \frac{2}{17}\left(\frac{2}{4} + \frac{3}{6}\right) = \frac{2}{17}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$P(2Y < X) + P(2Y > X) + P(2Y = X) = \frac{3}{34} + \frac{27}{34} + \frac{2}{17} = 1,$$

όπως θα περιμέναμε.

(ε) Για 2 διακριτές τυχαίες μεταβλητές X και Y με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p_{X,Y}(x, y)$, έχουμε:

$$p_X(x) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y) \quad \text{και} \quad p_Y(y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y).$$

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα ο αριθμός των πιθανών ζεύγων (X, Y) είναι αρκετά μικρός, άρα μπορούμε να προσδιορίσουμε τις περιθωριακές ΣΠ αριθμητικά. Για παράδειγμα,

$$p_X(4) = P(\{(4, 1)\}) + P(\{(4, 2)\}) + P(\{(4, 3)\}) = \frac{6}{34}.$$

Συνολικά έχουμε:

$$p_X(x) = \begin{cases} 12/17, & x = 1, \\ 3/17, & x = 4, \\ 2/17, & x = 6, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

και

$$p_Y(y) = \begin{cases} 1/6, & y = 1 \\ 1/3, & y = 2, \\ 1/2, & y = 3, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(στ) Η μέση τιμή μιας τυχαίας διακριτής μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο

$$E[X] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x p_X(x).$$

Για τη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε,

$$E[X] = 1 \cdot \frac{12}{17} + 4 \cdot \frac{3}{17} + 6 \cdot \frac{2}{17} = \frac{36}{17}$$

και

$$E[Y] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{3}.$$

(3) Η διασπορά μιας τυχαίας διακριτής μεταβλητής X υπολογίζεται από τον $E[X^2] - (E[X])^2$ ή από τον $E[(X - E[X])^2]$. Εφαρμόζοντας το δεύτερο τύπο ισχύει,

$$\text{var}(X) = \left(1 - \frac{36}{17}\right)^2 \cdot \frac{12}{17} + \left(4 - \frac{36}{17}\right)^2 \cdot \frac{3}{17} + \left(6 - \frac{36}{17}\right)^2 \cdot \frac{2}{17} = \frac{948}{289}$$

$$\text{var}(Y) = \left(1 - \frac{7}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(2 - \frac{7}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(3 - \frac{7}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{9}.$$

Άσκηση 4.

(α) Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $p_{N,K}(n, k) = p_{N|K}(n|k)p_K(k)$ για να υπολογίσουμε την από κοινού σ.π. :

$$p_{N,K}(n, k) = \begin{cases} 1/(4k), & k = 1, 2, 3, 4 \text{ και } n = 1, \dots, k; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(β) Η σ.π. $p_N(n)$ δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$p_N(n) = \sum_k p_{N,K}(n, k) = \sum_{k=n}^4 \frac{1}{4k}$$

δηλαδή:

$$p_N(n) = \begin{cases} 25/48, & n = 1 \\ 13/48, & n = 2 \\ 7/48, & n = 3 \\ 3/48, & n = 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(γ) Η δεσμευμένη σ.π.π είναι:

$$p_{K|N}(k|2) = \frac{p_{N,K}(2, k)}{p_N(2)} = \begin{cases} 6/13, & k = 2; \\ 4/13, & k = 3; \\ 3/13, & k = 4; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(δ) Έστω A το γεγονός ότι $2 \leq N \leq 3$. Πρώτα υπολογίζουμε την δεσμευμένη σ.π. του K δεδομένου του A :

$$p_{K|A}(k) = \frac{P(K = k, A)}{P(A)}$$

$$P(A) = p_N(2) + p_N(3) = 5/12$$

$$P(K = k, A) = \begin{cases} 1/8, & k = 2; \\ 1/12 + 1/12, & k = 3; \\ 1/16 + 1/16, & k = 4; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$p_{K|A}(k) = \begin{cases} 3/10, & k = 2; \\ 2/5, & k = 3; \\ 3/10, & k = 4; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επειδή η δεσμευμένη σ.π. του K δεδομένου του A είναι συμμετρική γύρω από το $k = 3$, γνωρίζουμε ότι $E[K|A] = 3$. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την δεσμευμένη διασπορά του K δεδομένου του A :

$$\text{var}(K|A) = E[(K - E[K|A])^2|A] = 3/10(2 - 3)^2 + 2/5(0) + 3/10(4 - 3)^2 = 3/5$$

(ε) Έστω C_i το κόστος ενός βιβλίου i και $E[C_i] = 3$. Έστω T το συνολικό κόστος, δηλαδή $T = C_1 + \dots + C_N$. Μπορούμε να υπολογίσουμε το $E[T]$ ως εξής:

$$\begin{aligned} E[T] &= \sum_{i=1}^4 E[T|N = i]p_N(i) \\ &= E[C_i]p_N(1) + 2E[C_i]p_N(2) + 3E[C_i]p_N(3) + 4E[C_i]p_N(4) \\ &= 3(25/48) + 6(13/48) + 9(7/48) + 12(1/16) \\ &= 21/4. \end{aligned}$$