

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 15/11/2010

Ημερομηνία Παράδοσης: 24/11/2010

Θέματα: Διακριτές τυχαίες μεταβλητές, από κοινού και δεσμευμένες ΣΠ.

Άσκηση 1. Ο Στέφανος οδηγεί στο Πανεπιστήμιο κάθε πρωί και είναι στο έλεος των φαναριών του Ηρακλείου. Όταν όλα τα φανάρια που συναντά στην Λεωφόρο Κνωσού είναι πράσινα (ναι, καλά...), φτάνει στη σχολή σε 18 λεπτά. Στη διαδρομή συναντά 5 φανάρια, το καθένα από τα οποία είναι κόκκινο με πιθανότητα $1/3$, ανεξάρτητα από τα άλλα. Κάθε κόκκινο φανάρι προσθέτει 1 λεπτό στη διάρκεια της διαδρομής.

(α) Ορίζουμε την τ.μ. R_i ως το χρόνο που ο Στέφανος καθυστερεί στο i -στό φανάρι. Τι είδους τ.μ. είναι η R_i ; Ποιά είναι η μέση τιμή και η διασπορά της;

(β) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας, τη μέση τιμή, και τη διασπορά της τ.μ. X , της διάρκειας της διαδρομής του Στέφανου. *Βοήθεια:* Εκφράστε την X ως συνάρτηση των R_i .

(γ) Ορίζουμε την τ.μ. N ως το πλήθος των κόκκινων φαναριών που συνάντησε ο Στέφανος. Υπολογίστε τη *δεσμευμένη* συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. N , δεδομένου του γεγονότος ότι η διάρκεια της διαδρομής του Στέφανου είναι μικρότερη ή ίση με 19 λεπτά. Δεδομένου του ίδιου γεγονότος, $\{X \leq 19\}$, ποιά είναι το μέσο πλήθος των φαναριών που συνάντησε;

(δ) Δεδομένου ότι το τελευταίο κόκκινο φανάρι που συνάντησε ο Στέφανος ήταν το τέταρτο φανάρι, υπολογίστε τη *δεσμευμένη* διασπορά του συνολικού πλήθους των κόκκινων φαναριών που συνάντησε.

(ε) Δεδομένου ότι ο Στέφανος συνάντησε συνολικά 3 κόκκινα φανάρια, υπολογίστε την πιθανότητα ότι ακριβώς 2 από τα πρώτα 3 φανάρια ήταν κόκκινα.

Άσκηση 2. Δύο παίκτες ρίχνουν ένα δίκαιο τετράεδρο ζάρι δύο φορές ο καθένας. Ο παίκτης A κερδίζει σε ευρώ το ποσό X που ορίζεται ως το μέγιστο των δύο ρίψεων μείον 1. Ο παίκτης B κερδίζει σε ευρώ το ποσό Y που ορίζεται ως το ελάχιστο των δύο ρίψεων.

(α) Υπολογίστε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. X και Y , $p_{X,Y}(x,y)$, καθώς και τις περιθωριακές ΣΠ $p_X(x)$ και $p_Y(y)$.

(β) Υπολογίστε τις μέσες τιμές των τ.μ. X , Y και $X - Y$.

(γ) Υπολογίστε τις διασπορές των τ.μ. X και Y .

(δ) Υπολογίστε τη ΣΠ και τη διασπορά της τ.μ. $Z = X - Y$.

Άσκηση 3. Οι τ.μ. X και Y έχουν την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{cy}{x}, & x \in \{1, 4, 6\} \text{ και } y \in \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- (α) Υπολογίστε τη σταθερά c .
- (β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(2Y < X)$.
- (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(2Y > X)$.
- (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(2Y = X)$.
- (ε) Υπολογίστε τις περιθωριακές ΣΠ $p_X(x)$ και $p_Y(y)$.
- (στ) Υπολογίστε τις μέσες τιμές $E[X]$ και $E[Y]$.
- (ζ) Υπολογίστε τις διασπορές $var(X)$ και $var(Y)$.

Άσκηση 4. Ο Χρήστος αφιερώνει K ώρες σε ένα βιβλιοπωλείο για την αγορά βιβλίων. Το K είναι τ.μ. που παίρνει τις τιμές 1, 2, 3 και 4 με ίσες πιθανότητες. Το πλήθος των βιβλίων, N , που αγοράζει ο Χρήστος είναι επίσης μία τ.μ. που εξαρτάται από το πόση ώρα ψωνίζει σύμφωνα με το πιθανοτικό μοντέλο:

$$p_{N/K}(n/k) = \frac{1}{k}, \text{ για } n = 1, \dots, k.$$

- (α) Υπολογίστε την από κοινού ΣΠ των K και N .
- (β) Υπολογίστε την περιθωριακή ΣΠ της N καθώς και το μέσο πλήθος των βιβλίων που αγοράζει ο Χρήστος.
- (γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη ΣΠ του χρόνου που πέρασε στο βιβλιοπωλείο δεδομένου ότι αγόρασε 2 βιβλία, δηλαδή υπολογίστε τη συνάρτηση $p_{K/N}(k/2)$.
- (δ) Μας δίδεται ότι ο Χρήστος αγόρασε τουλάχιστον 2 αλλά όχι περισσότερα από 3 βιβλία. Υπολογίστε τη δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά της τ.μ. K , δεδομένης της παραπάνω πληροφορίας.
- (ε) Το κόστος κάθε βιβλίου είναι τ.μ. με μέση τιμή ίση με 3 ευρώ. Υπολογίστε τη μέση τιμή του ποσού το οποίο ο Χρήστος ξόδεψε συνολικά σε βιβλία. Υπόδειξη: Δεσμεύστε ως προς τα γεγονότα $N = 1, \dots, N = 4$ και χρησιμοποιείστε το θεώρημα ολικής μέσης τιμής.