

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 3/11/2010

Ημερομηνία Παράδοσης: 15/11/2010

Άσκηση 1.

(α) Ο δειγματοχώρος του πειράματος αποτελείται από 9 ισοπίθανα ζευγάρια (i, j) με $i, j = 1, 2, 3$. Για κάθε τιμή της τ.μ. X (2, 3, 4, 5, 6), υπολογίζουμε το πλήθος των αποτελεσμάτων που δίνουν άθροισμα που ισούται με τη αντίστοιχη τιμή της τ.μ. Π.χ., το γεγονός $\{X = 3\}$ προκύπτει όταν έρθουν τα ζευγάρια (1, 2) ή (2, 1). Εύκολα προκύπτει τότε ότι:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/9, & x = 2, 6 \\ 2/9, & x = 3, 5 \\ 3/9, & x = 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$E[X] = \sum_{x=2}^6 xp_X(x) = 2\frac{1}{9} + 3\frac{2}{9} + 4\frac{3}{9} + 5\frac{2}{9} + 6\frac{1}{9} = 4.$$

Παρατηρούμε ότι $E[X] = 4$, δεδομένου ότι η συνάρτηση πιθανότητας είναι συμμετρική γύρω από το 4. Για τον υπολογισμό της διακύμανσης της X αρχικά υπολογίζουμε το εξής:

$$E[X^2] = \sum_{x=2}^6 x^2 p_X(x) = 4\frac{1}{9} + 9\frac{2}{9} + 16\frac{3}{9} + 25\frac{2}{9} + 36\frac{1}{9} = \frac{52}{3}$$

και άρα:

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{4}{3}.$$

(β) Αντιστοιχίζοντας τις δυνατές τιμές της X και τις πιθανότητες τους στις δυνατές τιμές της Z , έχουμε:

$$p_Z(z) = \begin{cases} 1/9, & x = 4, 36 \\ 2/9, & x = 9, 25 \\ 3/9, & x = 16 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η μέση τιμή της Z είναι, βάσει του προηγούμενου ερωτήματος:

$$E[Z] = E[X^2] = \frac{52}{3}.$$

(γ) Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα του τελεστή μέσης τιμής και τα παραπάνω αποτελέσματα, υπολογίζουμε τις μέσες τιμές των Y και W :

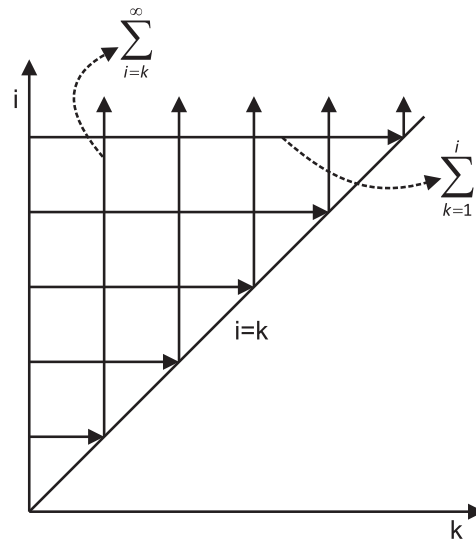
$$E[Y] = 0.5E[X^2] = \frac{26}{3}.$$

$$E[W] = E[X^2 - 2X + 1] = E[X^2] - 2E[X] + 1 = \frac{31}{3}.$$

Συνεπώς, η μέση τιμή της W είναι μεγαλύτερη από αυτή της Y .

Άσκηση 2.

(α) Το διπλό άθροισμα που χρησιμοποιείται για την απόδειξη της δοθείσας σχέσης απεικονίζεται παρακάτω:



Καταρχήν, ισχύει ότι:

$$P(X \geq k) = \sum_{i=k}^{\infty} p_X(i)$$

και συνεπώς:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} p_X(i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i p_X(i) = \sum_{i=1}^{\infty} i p_X(i) = E[X]$$

(β) Καταρχήν, έχουμε ότι:

$$P(Y \geq k) = \sum_{i=k}^{\infty} p(1-p)^{i-1} = p(1-p)^{k-1} \sum_{l=0}^{\infty} (1-p)^l = (1-p)^{k-1} \quad \text{για } k = 1, 2, \dots$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση του ερωτήματος (α) και την παραπάνω εξίσωση, έχουμε τελικά:

$$E[Y] = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}.$$

Άσκηση 3.

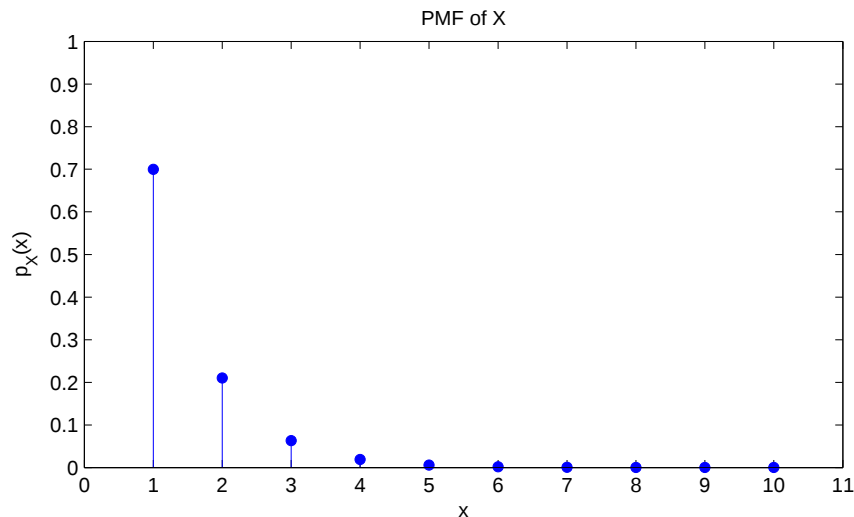
(α) Έστω X η διάρκεια του αγώνα σε παρτίδες. Για να κερδίσει ο Χρήστος έναν αγώνα X παρτίδων, πρέπει οι $(X-1)$ πρώτες παρτίδες να λήξουν ισόπαλες και η τελευταία παρτίδα να κερδηθεί από το Χρήστο. Αθροίζοντας ως προς όλες τις δυνατές τιμές της X έχουμε:

$$P(\text{Ο Χρήστος κερδίζει τον αγώνα}) = \sum_{x=1}^{10} 0.3^{x-1} 0.4 = 0.571425.$$

(β) Ο αγώνας έχει διάρκεια X αν συμβούν $X - 1$ ισοπαλίες και ακολουθήσει νίκη οποιουδήποτε παίκτη. Υπάρχει, όμως, μία εξαίρεση: ο αγώνας θα έχει διάρκεια $X = 10$ αν και μόνο αν συμβούν 9 ισοπαλίες. Η πιθανότητα νίκης ανεξαρτήτως παίκτη είναι ίση με 1 μείον την πιθανότητα ισοπαλίας.

Άρα, η συνάρτηση πιθανότητας της X είναι:

$$p_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0.3^{x-1}0.7, & x = 1 \dots 9 \\ 0.3^9, & x = 10 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



(γ) Χρησιμοποιώντας την παραπάνω συνάρτηση πιθανότητας, έχουμε:

$$E[X] = \sum_{x=1}^{10} x \cdot p_X(x) = \sum_{x=1}^9 x \cdot 0.3^{x-1}0.7 + 10 \cdot 0.3^9 = 1.42856$$

Άσκηση 4.

(α) Αν για πρώτη φορά επιλέξουμε μπλε μπάλα στο i -οστό στάδιο, στα προηγούμενα $(i - 1)$ στάδια επιλέξαμε κόκκινη μπάλα. Συνεπώς:

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}, \quad P(X = 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4},$$

$$P(X = 4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}, \dots$$

Γενικά, λοιπόν, ισχύει:

$$P(X = i) = \frac{1}{i(i+1)}, \quad i \geq 1$$

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\begin{aligned} P(X > n) &= 1 - P(X \leq n) = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Για $n \rightarrow \infty$ ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X > n) = 0$$

συνεπώς η μπλε μπάλα θα επιλεγεί τελικά με πιθανότητα 1.

(γ) Η μέση τιμή της X είναι:

$$E[X] = \sum_i i \cdot P[X = i] = \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{1}{i(i+1)} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i+1} = \infty$$

Άσκηση 5.

(α) Ο αριθμός των εβδομάδων κατά τις οποίες η επένδυση σας διπλασιάζεται είναι μια δυωνυμική τυχαία μεταβλητή Y με παραμέτρους $(n = 5, p = 1/2)$, δηλαδή $Y \sim \Delta(5, 1/2)$. Αφού η επένδυση υποδιπλασιάζεται κατά τις υπόλοιπες $5 - Y$ εβδομάδες και κάθε υποδιπλασιασμός ακυρώνει έναν διπλασιασμό, έχουμε ότι:

$$X = 32 \cdot 2^Y \cdot 2^{-(5-Y)} = 32 \cdot 2^{2Y-5}$$

Οι πιθανές τιμές της X είναι 1, 4, 16, 64, 256 και 1024, που αντιστοιχούν στις $Y = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

(β)

$$\begin{aligned} p_X(1) &= P(X = 1) = P(Y = 0) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1/32 \\ p_X(4) &= P(X = 4) = P(Y = 1) = \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5/32 \\ p_X(16) &= P(X = 16) = P(Y = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10/32 \\ p_X(64) &= P(X = 64) = P(Y = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10/32 \\ p_X(256) &= P(X = 256) = P(Y = 4) = \binom{5}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5/32 \\ p_X(1024) &= P(X = 1024) = P(Y = 5) = \binom{5}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1/32 \end{aligned}$$

(γ) Η μέση τιμή της X είναι:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum X \cdot P(X) \\ &= 1 \cdot (1/32) + 4 \cdot (5/32) + 16 \cdot (10/32) + 64 \cdot (10/32) + 256 \cdot (5/32) + 1024 \cdot (1/32) \\ &= 97.65625 \end{aligned}$$

Άρα η τηλεοπτική διαφήμιση υποτιμά λίγο την απόδοση.

$$(δ) P(X < 32) = P(X = 1) + P(X = 4) + P(X = 16) = 1/2$$

(ε) Υπάρχει 50% πιθανότητα για κάποιον να χάσει τα λεφτά του με αυτήν την επένδυση. Εφόσον οι πιθανότητες απώλειας των χρημάτων είναι σημαντικές, αλλά και τα κέρδη που μπορεί να αποφέρει η επένδυση είναι υψηλά, εξαρτάται από το πόσο σημαντικό είναι για τον καθένα το αρχικό ποσό που θέλει να διαθέσει. Σε κάθε περίπτωση αν διαθέσει κάποιο μικρό αρχικό ποσό, η επένδυση θεωρείται αρκετά επικερδής με χαμηλό κόστος.