

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 3/11/2010

Ημερομηνία Παράδοσης: 15/11/2010

Θέματα: Διακριτές τυχαίες μεταβλητές, μέση τιμή, διασπορά.

Άσκηση 1. Ρίχνουμε δύο φορές ένα δίκαιο τριέδρο ζάρι. Ορίζουμε την τ.μ. X ως το άθροισμα των δύο ρίψεων.

(α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας (ΣΠ), $p_X(k)$, τη μέση τιμή, $E[X]$, και τη διασπορά, $var(X)$, της X .

(β) Ορίζουμε τη νέα τ.μ. $Z = X^2$. Υπολογίστε τη ΣΠ, $p_Z(k)$, και τη μέση τιμή, $E[Z]$, της Z .

(γ) Έστω οι τ.μ. $Y = 0.5X^2$ και $W = (X - 1)^2$. Ποια από τις 2 τ.μ. έχει τη μεγαλύτερη μέση τιμή;

Άσκηση 2. (α) Έστω η τ.μ. X η οποία παίρνει τιμές στο σύνολο των θετικών ακέραιων αριθμών. Δείξτε ότι

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k). \quad (1)$$

Βοήθεια: Αντικαταστήστε στην (1) την έκφραση για το $P(X \geq k)$ και προσέξτε τα όρια των αθροισμάτων.

(β) Χρησιμοποιήστε την (1) για να υπολογίσετε τη μέση τιμή της Γεωμετρικής τ.μ. Y με συνάρτηση πιθανότητας

$$p_Y(k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

όπου $0 \leq p \leq 1$.

Άσκηση 3. Ο Χρήστος και ο Ανδρέας παίζουν σκάκι και ο πρώτος που κερδίζει μία παρτίδα, κερδίζει τον αγώνα. Μετά από 10 συνεχόμενες ισόπαλες παρτίδες, ο αγώνας τελειώνει ισόπαλος. Μία παρτίδα κερδίζεται από τον Χρήστο με πιθανότητα 0.4, από τον Ανδρέα με πιθανότητα 0.3, και λήγει ισόπαλη με πιθανότητα 0.3.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο Χρήστος κερδίζει τον αγώνα.

(β) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X , όπου X είναι η διάρκεια του αγώνα σε παρτίδες.

(γ) Υπολογίστε τη μέση τιμή της X .

Άσκηση 4. Ένα δοχείο περιέχει αρχικά μία κόκκινη μπάλα και μία μπλε μπάλα. Σε κάθε στάδιο του πειράματος, επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα από το δοχείο και την επανατοποθετούμε μέσα στο δοχείο μαζί με ακόμα μία μπάλα του ίδιου χρώματος. Δηλαδή, αν την πρώτη φορά επιλέξουμε την κόκκινη μπάλα, τότε αυτή τοποθετείται πάλι στο δοχείο μαζί με άλλη μία κόκκινη μπάλα, οπότε το δοχείο περιέχει 2 κόκκινες και μία μπλε.

Έστω X το πλήθος των σταδίων έως την επιλογή της μπλε μπάλας. Π.χ. αν στο πρώτο στάδιο επιλέχθηκε κόκκινη μπάλα και στο δεύτερο στάδιο μπλε, τότε $X = 2$.

(α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας, $p_X(i)$, της τ.μ. X .

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X > n)$, όπου n φυσικός αριθμός, και δείξτε ότι η πιθανότητα του γεγονότος να επιλεγεί τελικά η μπλε μπάλα είναι 1.

(γ) Υπολογίστε τη μέση τιμή της X . Με άλλα λόγια, πόσα στάδια (πόσος χρόνος) θα χρειαστούν κατά μέσο όρο για να επιλεγεί η μπλε μπάλα;

Άσκηση 5. Το διαφημιστικό φυλλάδιο της GoDotCom Inc., μιας εταιρίας διαχείρισης κεφαλαίων, υποστηρίζει ότι μπορεί να διπλασιάσει την επένδυση των πελατών της σε μία εβδομάδα μέσω εμπορίας μετοχών νέας τεχνολογίας. Οι διαφημίσεις της στην τηλεόραση διακηρύσσουν ότι "κατά μέσο όρο οι πελάτες μας τριπλασιάζουν τα λεφτά τους σε 5 εβδομάδες!" Αποφασίζετε να επενδύσετε 32 ευρώ μέσω της GoDotCom Inc. για μία περίοδο 5 εβδομάδων. Έστω X η αξία της επένδυσής σας στο τέλος αυτής της περιόδου.

Τώρα, υποθέτουμε ότι η GoDotCom Inc. σε μία εβδομάδα διπλασιάζει την επένδυσή σας με πιθανότητα $1/2$ και χάνει το 50% της επένδυσής σας με πιθανότητα $1/2$. Δηλαδή, αν επενδύσετε C ευρώ, τότε μία εβδομάδα μετά θα έχετε είτε $2C$ είτε $C/2$ ευρώ με την ίδια πιθανότητα. Υποθέτουμε ακόμα ότι η απόδοση κάθε εβδομάδας αποτελεί μία ανεξάρτητη δοκιμή η οποία είτε διπλασιάζει είτε μειώνει στο μισό την επένδυση που είχατε στην αρχή της εβδομάδας.

(α) Ποιο το πεδίο τιμών της τ.μ. X ;

(β) Ποια η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X ;

(γ) Ποια η μέση τιμή της τ.μ. X ; Είναι η διαφήμιση της GoDotCom Inc. ακριβής;

(δ) Ποια η πιθανότητα ότι θα χάσετε λεφτά επενδύοντας με την GoDotCom Inc.; Δηλαδή βρείτε την $P(X < 32)$.

(ε) Μία επένδυση 32.000 ευρώ με την GoDotCom Inc. μπορεί να αξίζει 1.000 ευρώ σε 5 εβδομάδες! Έστω ότι είχατε αυτά τα χρήματα. Θα αποφασίζετε να τα επενδύσετε με την GoDotCom Inc.; Γιατί ναι ή γιατί όχι;