

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 25/10/2010

Ημερομηνία Παράδοσης: 3/11/2010

Άσκηση 1.

Εφόσον τα 4 φύλλα της Αλίκης είναι συγκεκριμένα, ο Βασίλης πρέπει να διαλέξει 4 επιπλέον φύλλα από τα 48 που απομένουν. Συνεπώς, το συνολικό πλήθος των δυνατών συνδυασμών φύλλων του Βασίλη στους οποίους περιλαμβάνονται τα 4 φύλλα της Αλίκης είναι $\binom{4}{4}\binom{48}{4}$. Το συνολικό πλήθος των τρόπων με τους οποίους ο Βασίλης μπορεί να διαλέξει οποιαδήποτε 8 φύλλα από τα 52 της τράπουλας είναι $\binom{52}{8}$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{\binom{4}{4}\binom{48}{4}}{\binom{52}{8}} = 0.0259\%$.

Άσκηση 2.

(α) Δεδομένου ότι κάθε φύλλο έχει την ίδια πιθανότητα να είναι στη κορυφή και συνολικά υπάρχουν 4 άσοι στα 52 φύλλα, η πιθανότητα τα πάνω φύλλο να είναι άσος είναι $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

(β) Η πιθανότητα είναι ξανά $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ δεδομένου ότι κάθε κάρτα έχει την ίδια πιθανότητα να είναι στη δεύτερη θέση και συνολικά υπάρχουν 4 άσοι στα 52 φύλλα.
Εναλλακτικά,

$$\begin{aligned} P(2^\circ = \text{άσος}) &= P(2^\circ = \text{άσος} | 1^\circ = \text{άσος})P(1^\circ = \text{άσος}) \\ &+ P(2^\circ = \text{άσος} | 1^\circ \neq \text{άσος})P(1^\circ \neq \text{άσος}) = \frac{3}{51} \frac{1}{13} + \frac{4}{51} \frac{12}{13} = \frac{1}{13}. \end{aligned}$$

(γ) Εφόσον τραβάμε ένα φύλλο από τη τράπουλα και είναι ρήγας, παραμένουν στη τράπουλα 51 φύλλα εκ των οποίων τα 4 θα είναι άσοι. Δεδομένου ότι κάθε φύλλο έχει την ίδια πιθανότητα να είναι οποιαδήποτε στη τράπουλα, η πιθανότητα το δεύτερο φύλλο να είναι άσος είναι $\frac{4}{51}$.

(δ) Συνολικά υπάρχουν $\binom{52}{7}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε 7 φύλλα από μια τράπουλα των 52 φύλλων.

(i) Υπάρχουν $\binom{4}{3}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε 3 άσσους από τους 4 άσσους που υπάρχουν στη τράπουλα. Επιπλέον, υπάρχουν $\binom{48}{4}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε 7 φύλλα από τα 48 φύλλα της τράπουλας που έχουν απομείνει και τα οποία δεν είναι άσοι. Συνεπώς, υπάρχουν $\binom{4}{3}\binom{48}{4}$ δυνατοί συνδυασμοί να τραβήξουμε 7 φύλλα που να περιέχουν ακριβώς 3 άσσους. Για να βρούμε τη πιθανότητα ότι στα 7 φύλλα περιέχονται 3 άσοι, διαιρούμε αυτό τον αριθμό με το συνολικό πλήθος των δυνατών συνδυασμών να διαλέξουμε 7 φύλλα από μια τράπουλα των 52 φύλλων: $\frac{\binom{4}{3}\binom{48}{4}}{\binom{52}{7}}$.

(ii) Με ανάλογο συλλογισμό όπως παραπάνω, η πιθανότητα στα 7 φύλλα να περιέχονται 2 ρήγες είναι ίση με $\frac{\binom{4}{2}\binom{48}{5}}{\binom{52}{7}}$.

(iii) Έστω A το γεγονός να τραβήξουμε 7 φύλλα που να περιέχουν ακριβώς 3 άσσους και B το γεγονός να τραβήξουμε 7 φύλλα που να περιέχουν ακριβώς 2 ρήγες. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι προφανώς η $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Η πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ είναι γνωστές, από τα προηγούμενα ερωτήματα, άρα πρέπει αν βρούμε τη πιθανότητα $P(A \cap B)$. Συνολικά υπάρχουν $\binom{4}{3} \binom{4}{2} \binom{44}{2}$ δυνατοί τρόποι για να επιλέξουμε 7 φύλλα που περιέχουν ακριβώς 3 άσσους και 2 ρήγες. Άρα :

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{4}{3} \binom{4}{2} \binom{44}{2}}{\binom{52}{7}}$$

και

$$P(A \cup B) = \frac{\binom{4}{3} \binom{48}{4} + \binom{4}{2} \binom{48}{5} - \binom{4}{3} \binom{4}{2} \binom{44}{2}}{\binom{52}{7}}.$$

Άσκηση 3.

Αρχίζουμε υποθέτοντας ότι όλες οι $\binom{52}{5}$ δυνατές μοιρασιές είναι ισοπίθανες. Για να υπολογίσουμε το πλήθος των αποτελεσμάτων που σχηματίζουν “κέντα” (π.χ. στο 5), υπολογίζουμε πρώτα το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων για τα οποία μια μοιρασιά αποτελείται από ένα άσσο, ένα δύο, ένα τρία, ένα τέσσερα και ένα πέντε. Έστω καταρχάς ότι το χρώμα δεν μας ενδιαφέρει. Καθώς ο άσσος μπορεί να είναι ένας από τους τέσσερις άσσους και ομοίως για τις υπόλοιπες 4 κάρτες, υπάρχουν 4^5 δυνατά αποτελέσματα που μπορούν να μας δώσουν την παραπάνω μοιρασιά. Αλλά καθώς στα τέσσερα από αυτά τα αποτελέσματα όλες οι κάρτες είναι του ίδιου χρώματος (οπότε λέμε τότε ότι τα πέντε φύλλα σχηματίζουν “φλος”), προκύπτει τελικά ότι υπάρχουν $4^5 - 4$ μοιρασιές που σχηματίζουν “κέντα” στο πέντε, δηλαδή “κέντα” της μορφής: άσσος, δύο, τρία, τέσσερα και πέντε. Παρόμοια υπάρχουν $4^5 - 4$ μοιρασιές που σχηματίζουν “κέντα” στον άσσο: δέκα, βαλές, ντάμα, ρήγας και άσσος. Συνολικά έχουμε 10 κέντες σε κάποιο συγκεκριμένο φύλλο: άσσο, ρήγα, ντάμα, βαλέ, 10, ..., 5. Συνεπώς, υπάρχουν $10(4^5 - 4)$ μοιρασιές που σχηματίζουν “κέντα”. Έτσι η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$\frac{10(4^5 - 4)}{\binom{52}{5}} \approx 0.0039.$$

Άσκηση 4.

Καθώς κάθε άτομο μπορεί να έχει γενέθλια οποιαδήποτε από τις 365 μέρες, υπάρχει ένα σύνολο από $(365)^n$ πιθανά αποτελέσματα. (Αγνοούμε την πιθανότητα κάποιος να έχει γεννηθεί στις 29 Φεβρουαρίου.) Υποθέτοντας πως κάθε ένα από τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανο να πραγματοποιηθεί, βλέπουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι $(365)(364)(363) \dots (365 - n + 1) / (365)^n$. Είναι πέρα από κάθε προσδοκία το γεγονός ότι για $n \geq 23$, αυτή η πιθανότητα είναι μικρότερη από $\frac{1}{2}$. Αυτό σημαίνει πως αν υπάρχουν 23 ή περισσότερα άτομα σε έναν χώρο, η πιθανότητα τουλάχιστον δύο από αυτούς να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα υπερβαίνει το $\frac{1}{2}$.

Άσκηση 5.

(α) Ο δειγματοχώρος του πειράματος αποτελείται από 9 ισοπίθανα ζευγάρια (i, j) με $i, j = 1, 2, 3$. Για κάθε τιμή της τ.μ. $X(0, \pm 1, \pm 2)$, υπολογίζουμε το πλήθος των αποτελεσμάτων που δίνουν διαφορά που ισούται με τη αντίστοιχη τιμή της τ.μ. Π.χ., το γεγονός $\{X = 0\}$ προκύπτει όταν έρθουν οι 3 διπλές $(1, 1)$, $(2, 2)$, και $(3, 3)$. Εύκολα προκύπτει τότε ότι :

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/9 & x = -2, 2 \\ 2/9 & x = -1, 1 \\ 3/9 & x = 0 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

$$E[X] = \sum_{x=-2}^2 xp_X(x) = -2\frac{1}{9} - 1\frac{2}{9} + 0\frac{3}{9} + 1\frac{2}{9} + 2\frac{1}{9} = 0.$$

Μπορούμε να δούμε ότι $E[X] = 0$ καθώς η ΣΠ είναι συμμετρική γύρω από το 0. Για να βρούμε τη διασπορά της τ.μ. X , πρώτα υπολογίζουμε:

$$E[X^2] = \sum_{x=-2}^2 x^2 p_X(x) = 4\frac{1}{9} + 1\frac{2}{9} + 0\frac{3}{9} + 1\frac{2}{9} + 4\frac{1}{9} = \frac{4}{3}$$

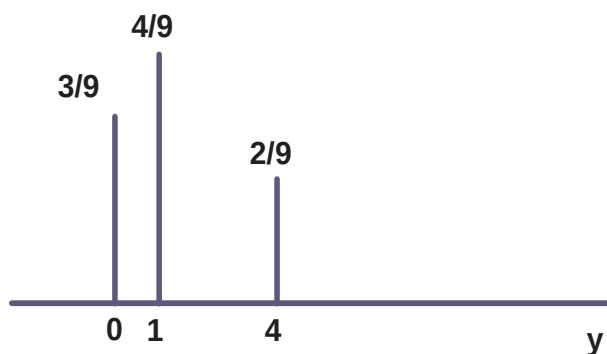
και

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{4}{3}.$$

(β) Έστω $Z = X^2$. Εύκολα προκύπτει ότι η Z παίρνει τις τιμές 0, 1, 4. Επίσης, $\{Z = 0\} \leftrightarrow \{X = 0\}$, $\{Z = 1\} \leftrightarrow \{X = -1\} \cup \{X = 1\}$ και $\{Z = 4\} \leftrightarrow \{X = -2\} \cup \{X = 2\}$. Ταιριάζοντας τις δυνατές τιμές του X και τις πιθανότητες τους με τις πιθανές τιμές του Z έχουμε

$$p_Z(z) = \begin{cases} 2/9 & z = 4 \\ 4/9 & z = 1 \\ 3/9 & z = 0 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

$p_Y(y)$



Άσκηση 6.

(α) Αναγνωρίζουμε ότι η X είναι μια Διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους $n = 40$ και $p = 0.2$:

$$p_X(k) = \binom{40}{k} 0.2^k 0.8^{40-k}, \quad k = 0, \dots, 40.$$

και $p_X(k) = 0$ για όλες τις άλλες τιμές του k .

(β)

$$\begin{aligned} P(\text{τουλάχιστον } 38 \text{ bits χωρίς σφάλμα}) &= P(X \leq 2) = p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) \\ &= \binom{40}{0} 0.8^{40} + \binom{40}{1} 0.2^1 0.8^{39} + \binom{40}{2} 0.2^2 0.8^{38} \\ &= 0.00794. \end{aligned}$$

(γ) Έστω Y το πλήθος των σφαλμάτων σε ένα λεπτό. Το Y είναι μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με $n = 6 \cdot 10^7$ και $p = 5 \cdot 10^{-8}$. Επομένως, το μέσος πλήθος σφαλμάτων κατά τη διάρκεια του ενός λεπτού είναι $E[Y] = np = 3$. Επίσης,

$$\begin{aligned} P(\text{τουλάχιστον } 1 \text{ σφάλμα κατά τη διάρκεια ενός λεπτού}) &= P(Y > 0) = 1 - p_Y(0) \\ &= 1 - (1 - 5 \cdot 10^{-8})^{6 \cdot 10^7} = 0.9502. \end{aligned}$$