

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 25/10/2010

Ημερομηνία Παράδοσης: 3/11/2010

Θέματα: Συνδυαστική ανάλυση, διακριτές τυχαίες μεταβλητές.

Άσκηση 1. Η Αλίκη και ο Βασίλης παίζουν το εξής παιχνίδι: Πρώτα, η Αλίκη τραβάει τυχαία 4 φύλλα από μία τράπουλα με 52 φύλλα, τα κοιτάει, σημειώνει στα κρυφά ποια είναι αυτά, και τα επιστρέφει πίσω στην τράπουλα. Στη συνέχεια ο Βασίλης τραβάει τυχαία 8 φύλλα από την τράπουλα. Η Αλίκη κερδίζει αν στα φύλλα που τράβηξε ο Βασίλης περιέχονται τα 4 δικά της. Με ποια πιθανότητα κερδίζει η Αλίκη;

Άσκηση 2. Έχουμε στα χέρια μας μια καλά ανακατεμένη τράπουλα με 52 φύλλα. Η τράπουλα, ως γνωστόν, περιέχει 4 άσσους και 4 ρήγες. Σε κάθε ένα από τα επόμενα ερωτήματα, ξεκινάμε με την πλήρη τράπουλα.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι το πάνω φύλλο είναι άσσος;

(β) Τραβάτε ένα φύλλο από την τράπουλα και το βάζετε στην άκρη χωρίς να το κοιτάξετε. Το βάζετε στην άκρη και τραβάτε άλλο ένα φύλλο. Ποια είναι η πιθανότητα ότι το δεύτερο φύλλο που τραβάτε είναι άσσος;

(γ) Τραβάτε ένα φύλλο από την τράπουλα και είναι ρήγας. Το βάζετε στην άκρη και τραβάτε άλλο ένα φύλλο. Ποια είναι η πιθανότητα ότι το δεύτερο φύλλο που τραβάτε είναι άσσος;

(δ) Έστω τώρα ότι τραβάτε 7 φύλλα από την τράπουλα.

(i) Ποια είναι η πιθανότητα ότι στα 7 φύλλα περιέχονται 3 άσσοι;

(ii) Ποια είναι η πιθανότητα ότι στα 7 φύλλα περιέχονται 2 ρήγες;

(iii) Ποια είναι η πιθανότητα ότι στα 7 φύλλα περιέχονται 3 άσσοι ή 2 ρήγες ή και τα δύο;

Άσκηση 3. Στο πόκερ μοιράζονται 5 φύλλα σε κάθε παίκτη από μία τράπουλα με 52 φύλλα. Αν τα φύλλα κάποιου έχουν διαφορετικές *διαδοχικές* τιμές χωρίς όλα να είναι του ίδιου *χρώματος* (υπάρχουν 4 χρώματα: μπαστούνια, κούπες, καρό, σπαθιά), λέμε ότι έχει κάνει *κέντα*. Για παράδειγμα, μία μοιρασιά που αποτελείται από: 5 κούπα, 6 κούπα, 7 σπαθί, 8 μπαστούνι, και 9 καρό είναι *κέντα*. Μάλιστα τη λέμε *κέντα στο 9*. Ποια είναι η πιθανότητα να κάνει κάποιος *κέντα*;

Άσκηση 4. Αν n άνθρωποι είναι παρόντες σε ένα δωμάτιο, ποια είναι η πιθανότητα δύο από αυτούς να *μην* έχουν γενέθλια την ίδια μέρα; Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το n ώστε η πιθανότητα αυτή να είναι μικρότερη του $1/2$;

Άσκηση 5. Ρίχνουμε δύο δίκαια τριεδρα ζάρια. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X ως την διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο ρίψεων.

(α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας (ΣΠ), τη μέση τιμή, και τη διασπορά της τ.μ. X . Δώστε τη γραφική παράσταση της ΣΠ της X .

(β) Υπολογίστε τη ΣΠ της τ.μ. $Y = X^2$ και δώστε τη γραφική της παράσταση.

Άσκηση 6. Θεωρήστε το δυαδικό κανάλι επικοινωνίας της εικόνας όπου η πιθανότητα να ληφθεί ένα σύμβολο (bit) λανθασμένα είναι $p = 0.2$, ανεξάρτητα από σύμβολο σε σύμβολο (ιδιότητα *έλλειψης μνήμης*). Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X ως το πλήθος των bits που λαμβάνονται λάθος κατά τη μετάδοση 5 bytes, δηλαδή κατά τη μετάδοση 40 bits.

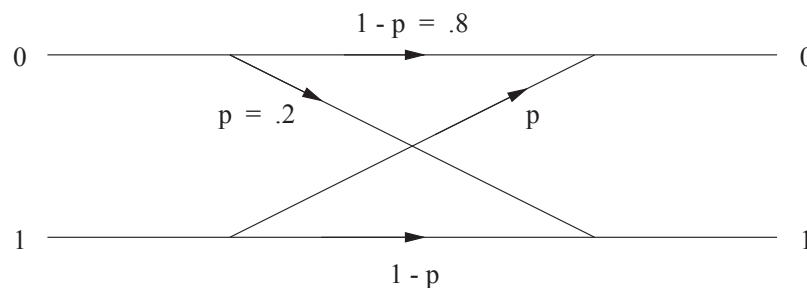
(α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X .

(β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι τουλάχιστον 38 από τα 40 bits μεταδίδονται χωρίς σφάλμα;

(γ) Έστω τώρα ότι $p = 5 \times 10^{-8}$ και ότι ο ρυθμός μετάδοσης στο κανάλι είναι 10^6 bits/sec.

(i) Ποιο είναι το μέσο πλήθος των σφαλμάτων κατά τη διάρκεια ενός λεπτού;

(ii) Ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον ενός σφάλματος κατά τη διάρκεια ενός λεπτού;



Σχήμα 1: Το δυαδικό κανάλι της άσκησης 6.