

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 14/10/2010

Ημερομηνία Παράδοσης: 25/10/2010

Άσκηση 1.

(α) Έστω A το ενδεχόμενο να έρθει κεφαλή και B το ενδεχόμενο να έρθουν γράμματα. Έστω επίσης O_n το ενδεχόμενο η n -οστή ρίψη να φέρει πράσινο. Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$$P(O_n) = P(O_n|A)P(A) + P(O_n|B)P(B) = (5/6)(1/2) + (1/2)(1/2) = 2/3.$$

(β) Κάνοντας ξανά χρήση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας:

$$\begin{aligned} P(O_n \cap O_{n+1}) &= \frac{1}{2}P((O_n \cap O_{n+1})|A) + \frac{1}{2}P((O_n \cap O_{n+1})|B) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right) \\ &= \frac{17}{36}. \end{aligned}$$

(γ) Έστω F_n το ενδεχόμενο και οι n πρώτες ρίψεις να φέρουν πράσινο.

$$\begin{aligned} P(O_{n+1}|F_n) &= \frac{P(O_{n+1} \cap F_n)}{P(F_n)} = \frac{P(F_{n+1})}{P(F_n)} \\ &= \frac{(1/2)P(F_{n+1}|A) + (1/2)P(F_{n+1}|B)}{(1/2)P(F_n|A) + (1/2)P(F_n|B)} \\ &= \frac{(5/6)^{n+1} + (1/2)^{n+1}}{(5/6)^n + (1/2)^n}. \end{aligned}$$

Για μεγάλα n , το $(5/6)^n$ γίνεται πολύ μεγαλύτερο από το $(1/2)^n$, επομένως το $P(O_{n+1}|F_n)$ προσεγγίζει το $\frac{(5/6)^{n+1}}{(5/6)^n} = 5/6$. Αυτό το αποτέλεσμα είναι λογικό: όσο περισσότερες φορές εμφανίζεται το πράσινο, τόσο πιο πιθανό είναι ότι έχει επιλεγεί το ζάρι A (το οποίο με πιθανότητα $5/6$ φέρνει πράσινο).

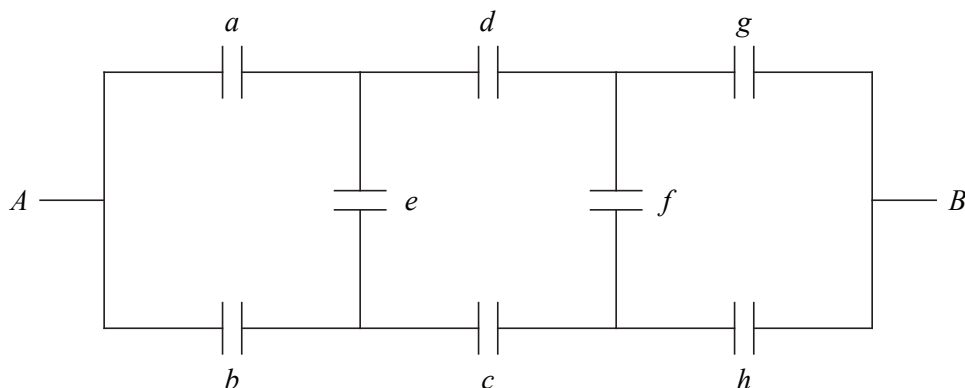
Επίσης, παρατηρείστε τη συμπεριφορά του $P(A|F_n)$ καθώς το $n \rightarrow \infty$. Με εφαρμογή των θεωρημάτων Bayes και ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} P(A|F_n) &= \frac{P(F_n|A)P(A)}{P(F_n)} = \frac{P(F_n|A)P(A)}{P(F_n|A)P(A) + P(F_n|B)P(B)} \\ &= \frac{(5/6)^n(1/2)}{(5/6)^n(1/2) + (1/2)^n(1/2)}. \end{aligned}$$

Καθώς το n μεγαλώνει, ο όρος $(1/2)^n$ στον παρονομαστή μικραίνει, και το κλάσμα τείνει στη μονάδα: γίνεται πιο πιθανό να έχει επιλεγεί το ζάρι A .

Άσκηση 2.

(α) Έστω M το ενδεχόμενο ακριβώς πέντε ζεύξεις να έχουν πέσει. Έστω C το ενδεχόμενο ο A να επικοινωνεί με τον B . Δεδομένου ότι ακριβώς πέντε ζεύξεις έχουν πέσει, ακριβώς τρεις εξακολουθούν



να λειτουργούν. Αυτά μαζί με το γεγονός ότι ο A επικοινωνεί με τον B δίνουν δύο δυνατότητες: ο A επικοινωνεί με τον B είτε μέσω της διαδρομής (a, d, g) είτε μέσω της (b, c, h) . Έχοντας επίσης δεδομένο ότι οι ζεύξεις αστοχούν ανεξάρτητα η μία από την άλλη:

$$\begin{aligned} P(C|M) &= P(\{(a, d, g) \text{ λειτουργεί}\} \cup \{(b, c, h) \text{ λειτουργεί}\} | M) \\ &= \frac{2(1-p)^3 p^5}{\binom{8}{5}(1-p)^3 p^5} = \frac{2(1-p)^3 p^5}{56(1-p)^3 p^5} = \frac{1}{28} \end{aligned}$$

(β) Με τον ορισμό του ενδεχομένου M όπως παραπάνω, οι πιθανότητες των ενδεχομένων 'η ζεύξη g λειτουργεί δεδομένου του M ', 'η ζεύξη h λειτουργεί δεδομένου του M ' καθώς και 'τόσο η g όσο και η h λειτουργούν δεδομένου του M ' μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

$$\begin{aligned} P(\{g \text{ λειτουργεί}\} | M) &= \frac{P(\{g \text{ λειτουργεί}\} \cap M)}{P(M)} = \frac{(1-p) \times \binom{7}{2}(1-p)^2 p^5}{\binom{8}{5}(1-p)^3 p^5} = \frac{21}{56}, \\ P(\{h \text{ λειτουργεί}\} | M) &= \frac{P(\{h \text{ λειτουργεί}\} \cap M)}{P(M)} = \frac{(1-p) \times \binom{7}{2}(1-p)^2 p^5}{\binom{8}{5}(1-p)^3 p^5} = \frac{21}{56}, \\ P(\{\text{και η } g \text{ και η } h \text{ λειτουργούν}\} | M) &= \frac{P(\{\text{και η } g \text{ και η } h \text{ λειτουργούν}\} \cap M)}{P(M)} = \\ &= \frac{p^2 \times \binom{6}{1}(1-p)p^5}{\binom{8}{5}(1-p)^3 p^5} = \frac{6}{56}. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω:

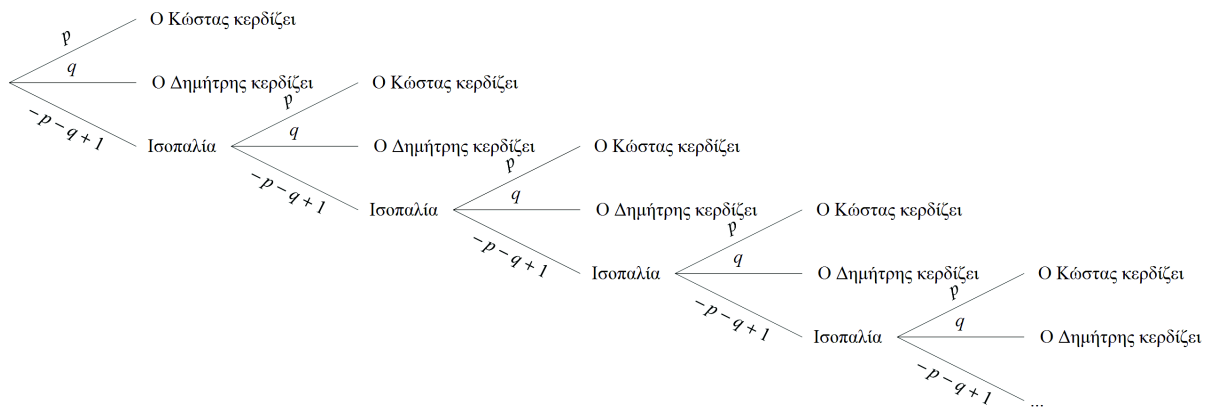
$$\begin{aligned} &P(\{\eta \ g \ \eta \ \eta \ h \text{ λειτουργεί, αλλά όχι και οι δύο}\} | M) \\ &= P(\{g \text{ λειτουργεί}\} | M) + P(\{h \text{ λειτουργεί}\} | M) - 2P(\{\text{και η } g \text{ και η } h \text{ λειτουργούν}\} | M) \\ &= \frac{21}{56} + \frac{21}{56} - 2 \frac{6}{56} = \frac{15}{28}. \end{aligned}$$

(γ) Έστω Q το ενδεχόμενο οι a, d και h αστοχούν. Δεδομένου ότι το Q συνέβη, ο μόνος τρόπος να επικοινωνούν οι A και B είναι να λειτουργούν οι ζεύξεις b, c, f και g .

$$\begin{aligned} P(C|Q) &= P(b \text{ λειτουργεί})P(c \text{ λειτουργεί})P(f \text{ λειτουργεί})P(g \text{ λειτουργεί}) \\ &= (1-p)^4. \end{aligned}$$

Άσκηση 3.**(α)** Η πιθανότητα να κερδίσει ο Κώστας μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά :

$$\begin{aligned}
 P(\text{Ο Κώστας κέρδισε τον αγώνα}) &= p + p(1-p-q) + p(1-p-q)^2 + \dots \\
 &= p [1 + (1-p-q) + (1-p-q)^2 + \dots] \\
 &= p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p-q)^k = p \frac{1}{1-(1-p-q)} = \frac{p}{p+q}.
 \end{aligned}$$

**(β)**

$$\begin{aligned}
 P(\text{Ο αγώνας διαρκεί το πολύ 5 παρτίδες (: A5)}) &= \\
 &= (p+q) + (p+q)(1-p-q) + (p+q)(1-p-q)^2 + (p+q)(1-p-q)^3 + (p+q)(1-p-q)^4 \\
 &= (p+q) \sum_{k=0}^4 (1-p-q)^k = (p+q) \frac{1-(1-p-q)^5}{1-(1-p-q)} = 1-(1-p-q)^5.
 \end{aligned}$$

Ισχύει επίσης ότι

$$P(\text{Ο Κώστας κέρδισε την πρώτη παρτίδα (: K1) } \cap \text{Ο αγώνας διαρκεί το πολύ 5 παρτίδες}) = p.$$

Επομένως

$$P(K1|A5) = \frac{P(K1 \cap A5)}{P(A5)} = \frac{p}{1-(1-p-q)^5}.$$

(γ)

$$P(\text{Ο αγώνας διαρκεί το πολύ 5 παρτίδες}) = 1-(1-p-q)^5.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
 &P(\text{Ο Κώστας κέρδισε τον αγώνα} \cap \text{Ο αγώνας διαρκεί το πολύ 5 παρτίδες}) \\
 &= p + p(1-p-q) + p(1-p-q)^2 + p(1-p-q)^3 + p(1-p-q)^4 \\
 &= \frac{p[1-(1-p-q)^5]}{1-(1-p-q)} = \frac{p[1-(1-p-q)^5]}{p+q}.
 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
 &P(\text{Ο Κώστας κέρδισε τον αγώνα} | \text{Ο αγώνας διαρκεί το πολύ 5 παρτίδες}) \\
 &= \frac{P(\text{Ο Κώστας κέρδισε τον αγώνα} \cap \text{Ο αγώνας διαρκεί το πολύ 5 παρτίδες})}{P(\text{Ο αγώνας διαρκεί το πολύ 5 παρτίδες})} = \frac{p}{p+q}
 \end{aligned}$$

(δ)

$$\begin{aligned}
& P(\text{Ο Κώστας κέρδισε πριν την έκτη παρτίδα} | \text{Ο Κώστας κέρδισε τον αγώνα}) \\
&= \frac{P(\text{Ο Κώστας κέρδισε πριν την έκτη παρτίδα} \cap \text{Ο Κώστας κέρδισε τον αγώνα})}{P(\text{Ο Κώστας κέρδισε τον αγώνα})} \\
&= \left(\frac{p[1 - (1 - p - q)^5]}{p + q} \right) / \left(\frac{p}{p + q} \right) \\
&= 1 - (1 - p - q)^5
\end{aligned}$$

Σε αυτό το αποτέλεσμα μπορούμε επίσης να καταλήξουμε αν παρατηρήσουμε ότι τα δυο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα. Αυτό μπορούμε να το συμπεράνουμε από τα ερωτήματα (α) και (γ).

$$\begin{aligned}
& P(\text{Ο Κώστας κέρδισε πριν την έκτη παρτίδα} | \text{Ο Κώστας κέρδισε τον αγώνα}) \\
&= P(\text{Ο Κώστας κέρδισε πριν την έκτη παρτίδα}) \\
&= 1 - (1 - p - q)^5.
\end{aligned}$$

Άσκηση 4.

(α) Όχι. Τα γεγονότα A και B δεν είναι ανεξάρτητα. Για να γίνει αυτό αντιληπτό, σημειώστε ότι $A \subset B$, οπότε θα είναι $P(A \cap B) = P(A)$. Η τελευταία έκφραση είναι ίση με το $P(A) \cdot P(B)$ μόνο όταν $P(B) = 1$ ή $P(A) = 0$. Όμως, στο παράδειγμά μας είναι καθαρά $P(B) < 1$ και $P(A) > 0$. Συνεπώς, είναι: $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ και άρα τα γεγονότα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.

(β) Ναι. Δεδομένου του γεγονότος Γ , το γεγονός A θα συμβεί αν και μόνο αν η Μαρία συναντήσει 5 ανθρώπους την δεύτερη εβδομάδα. Επομένως, είναι: $P(A | \Gamma) = 1/5$.

Αν η Μαρία έκανε 5 φίλους τη πρώτη εβδομάδα, είναι σίγουρη ότι θα κάνει περισσότερους από 5 φίλους συνολικά. Οπότε, θα είναι: $P(B | \Gamma) = 1$.

Αν το A συμβεί, τότε συμβαίνει και το B , επομένως θα ισχύει ότι: $P(A \cap B | \Gamma) = P(A | \Gamma) = P(A | \Gamma) \cdot P(B | \Gamma)$. Συνεπώς, τα γεγονότα A και B είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα δεδομένου του γεγονότος Γ .

(γ) Όχι. Βρήκαμε στο μέρος (β) ότι $P(A | \Gamma) = 1/5$ ενώ είναι: $P(A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$. Επομένως, είναι: $P(A | \Gamma) \neq P(A)$. Συνεπώς, τα γεγονότα A και Γ δεν είναι ανεξάρτητα.

Παρομοίως, είναι: $P(B | \Gamma) = 1$ ενώ είναι προφανές ότι $P(B) < 1$. Άρα, τα γεγονότα B και Γ δεν είναι ούτε αυτά ανεξάρτητα.

(δ) Έστω F_i , όπου $(i = 1, 2, \dots, 5)$, το γεγονός ότι την πρώτη εβδομάδα έγιναν i φίλοι. Παρομοίως, έστω S_i το γεγονός ότι την δεύτερη εβδομάδα έγιναν i φίλοι. Έστω T_j , όπου $(j = 2, \dots, 10)$, το γεγονός ότι ο συνολικός αριθμός φίλων που έγιναν τις 2 εβδομάδες είναι j . Τότε, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
P(2 \text{ την πρώτη} | 6 \text{ συνολικά}) &= P(F_2 | T_6) \\
&= \frac{P(T_6 | F_2) \cdot P(F_2)}{P(T_6)} \\
&= \frac{P(S_4) \cdot P(F_2)}{\sum_{i=1}^5 P(F_i \cap S_{6-i})} \\
&= \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}}{5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα χρησιμοποιεί τον κανόνα του Bayes, η τρίτη ισότητα χρησιμοποιεί το Ολικό Θεώρημα Πιθανοτήτων, και η τέταρτη (τελευταία) ισότητα χρησιμοποιεί το γεγονός ότι ο αριθμός των φίλων που γίνονται κάθε εβδομάδα είναι ανεξάρτητος.

Παρομοίως, προκύπτει ότι: $P(F_3 | T_6) = 1/5$.

(ε) Με βάση τις θεωρήσεις που έγιναν στο ερώτημα (δ) έχουμε:

$$\begin{aligned} P(F_2 \cup S_2 | T_6) &= P(F_2 | T_6) + P(S_2 | T_6) - P(F_2 \cap S_2 | T_6) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - 0 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι πιθανότητες υπό συνθήκη ικανοποιούν όλα τα αξιώματα πιθανοτήτων. Το $P(F_2 | T_6) = 1/5$ είχε βρεθεί στο προηγούμενο ερώτημα. Εφόσον οι εβδομάδες είναι κατανημεμένες το ίδιο, θα ισχύει και το: $P(S_2 | T_6) = 1/5$. Με τον ίδιο τρόπο θα έχουμε:

$$\begin{aligned} P(F_3 \cup S_3 | T_6) &= P(F_3 | T_6) + P(S_3 | T_6) - P(F_3 \cap S_3 | T_6) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - P(S_3 | F_3 \cap T_6) \cdot P(F_3 | T_6) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι το τελευταίο αποτέλεσμα είναι λογικό, αφού υπάρχει μόνο ένας τρόπος να συναντήσεις 6 ανθρώπους συναντώντας 3 σε τουλάχιστον μια εβδομάδα, ενώ υπάρχουν 2 τρόποι να συναντήσεις 6 ανθρώπους συναντώντας 2 σε τουλάχιστον μια εβδομάδα. Επομένως, είναι λογικό που η τελευταία πιθανότητα ισούται με το μισό της προηγούμενης.