

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 14/10/2010

Ημερομηνία Παράδοσης: 25/10/2010

Θέματα: Δεσμευμένη Πιθανότητα, Νόμος του Bayes, Ανεξαρτησία.

Άσκηση 1. Το δίκαιο εξάδρο ζάρι A έχει 5 πράσινες όψεις και μία κόκκινη. Το δίκαιο εξάδρο ζάρι B έχει 3 πράσινες όψεις και 3 κόκκινες. Ρίχνουμε ένα δίκαιο κέρμα. Αν έρθει κεφαλή, το παιχνίδι συνεχίζεται ρίχνοντας *μόνο* το ζάρι A, αλλιώς, αν έρθουν γράμματα, το παιχνίδι συνεχίζεται ρίχνοντας *μόνο* το ζάρι B.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι η n -στη ρίψη του ζαριού φέρνει πράσινο.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι τόσο η n -στη όσο και η $(n + 1)$ -στη ρίψη του ζαριού φέρνουν πράσινο.

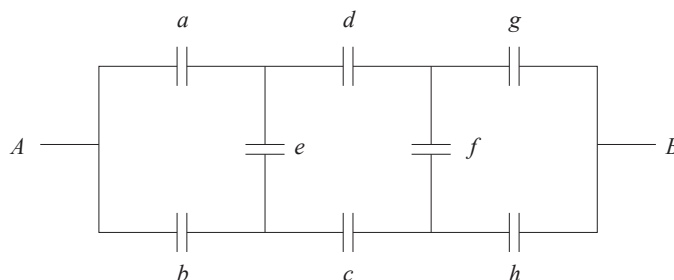
(γ) Αν έρθει πράσινο κατά τις n πρώτες ρίψεις, υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι η $(n + 1)$ -στη ρίψη θα φέρει πράσινο. Τι γίνεται καθώς το n τίνει στο άπειρο; Δώστε μία εξήγηση για το αποτέλεσμα.

Άσκηση 2. Στο τηλεπικοινωνιακό δίκτυο της εικόνας, οι ζεύξεις αστοχούν ανεξάρτητα η μία από την άλλη με πιθανότητα p . Το σημείο A επικοινωνεί με το σημείο B αν υπάρχει τουλάχιστον μία διαδρομή που περιέχει μόνο ενεργές ζεύξεις.

(α) Δεδομένου ότι ακριβώς 5 ζεύξεις έχουν πέσει, υπολογίστε την πιθανότητα ότι το A επικοινωνεί με το B.

(β) Δεδομένου ότι ακριβώς 5 ζεύξεις έχουν πέσει, υπολογίστε την πιθανότητα ότι είτε η ζεύξη g ή η ζεύξη h (αλλά όχι και οι δύο) λειτουργεί κανονικά.

(γ) Δεδομένου ότι οι ζεύξεις a , d και h δεν λειτουργούν (και ότι δεν έχουμε καμία πληροφορία για τις υπόλοιπες ζεύξεις), υπολογίστε την πιθανότητα ότι το A επικοινωνεί με το B.



Σχήμα 1: Το τηλεπικοινωνιακό δίκτυο της άσκησης 2.

Άσκηση 3. Ο Κώστας και ο Δημήτρης παίζουν σκάκι. Ο Κώστας κερδίζει την παρτίδα με πιθανότητα p , ο Δημήτρης κερδίζει με πιθανότητα q , ενώ με πιθανότητα $1 - p - q$ έχουμε ισοπαλία. Οι δύο παίκτες συνεχίζουν να παίζουν όσες παρτίδες χρειάζονται μέχρις ότου κάποιος από τους δύο κερδίσει για πρώτη φορά, οπότε κερδίζει και τον αγώνα.

(α) Με ποια πιθανότητα κερδίζει ο Κώστας τον αγώνα;

(β) Δεδομένου ότι ο αγώνας διαρκεί το πολύ 5 παρτίδες, ποια είναι η πιθανότητα ότι ο Κώστας κερδίζει στην πρώτη παρτίδα;

(γ) Δεδομένου ότι ο αγώνας διαρκεί το πολύ 5 παρτίδες, ποια είναι η πιθανότητα ότι ο Κώστας κερδίζει τον αγώνα;

(δ) Δεδομένου ότι ο Κώστας κερδίζει τον αγώνα, ποια είναι η πιθανότητα ότι κέρδισε πριν την έκτη παρτίδα;

Άσκηση 4. Η Μαρία, πρωτοετής φοιτήτρια στο Τμήμα μας, κάνει από έναν έως πέντε νέους φίλους/ες κάθε εβδομάδα, με ίση πιθανότητα. Ο αριθμός των φίλων που κάνει κάθε εβδομάδα είναι ανεξάρτητος από τις υπόλοιπες εβδομάδες. Μας ενδιαφέρει τι γίνεται σε δύο συνεχόμενες εβδομάδες.

Έστω A το γεγονός ότι "Η Μαρία έκανε συνολικά 10 νέους φίλους/ες τις δύο εβδομάδες". Έστω B το γεγονός ότι "Η Μαρία έκανε περισσότερους από 5 νέους φίλους/ες τις δύο εβδομάδες".

(α) Είναι τα A και B ανεξάρτητα;

(β) Έστω Γ το γεγονός ότι "Η Μαρία έκανε ακριβώς 5 νέους φίλους/ες την πρώτη εβδομάδα". Είναι τα A και B υπό συνθήκη ανεξάρτητα δεδομένου του Γ ;

(γ) Είναι τα A και Γ ανεξάρτητα; Είναι τα B και Γ ανεξάρτητα;

(δ) Δεδομένου ότι η Μαρία έκανε συνολικά 6 φίλους σε δύο εβδομάδες, ποια είναι η πιθανότητα ότι έκανε 2 φίλους την πρώτη εβδομάδα; Ποια είναι η πιθανότητα ότι έκανε 3 φίλους την πρώτη εβδομάδα;

(ε) Δεδομένου ότι η Μαρία έκανε συνολικά 6 φίλους σε δύο εβδομάδες, ποια είναι η πιθανότητα ότι έκανε 2 φίλους σε τουλάχιστον μία από τις δύο εβδομάδες; Ποια είναι η πιθανότητα ότι έκανε 3 φίλους σε τουλάχιστον μία από τις δύο εβδομάδες;