

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 04/10/2010

Ημερομηνία Παράδοσης: 13/10/2010

Άσκηση 1.

Από το θεώρημα του *DeMorgan* έχουμε ότι:

$$P(A \cup (B^c \cup C^c)^c) = P(A \cup (B \cap C))$$

(α) Τα B και C είναι ξένα μεταξύ τους, άρα $B \cap C = \emptyset$, συνεπώς $P(A \cup (B \cap C)) = P(A \cup \emptyset) = P(A) = 1/3$.

(β) $P(A \cup (B \cap C)) = P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap (B \cap C)) = 4P(A \cap B \cap C) + 2P(A \cap B \cap C) - P(A \cap B \cap C) = 5P(A \cap B \cap C) = 5/8$.

(γ) $P(A \cup (B \cap C)) = P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap (B \cap C)) = P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \stackrel{P(A \cap C)=0}{=} 1/2 + 1/3 + 0 = 5/6$.

(δ) Ισχύει $A^c \cap (B^c \cup C^c) = (A \cup (B^c \cup C^c)^c)^c$. Συνεπώς $P(A \cup (B^c \cup C^c)^c) = 1 - P((A \cup (B^c \cup C^c)^c)^c) = 1 - 0.6 = 0.4$.

Άσκηση 2.

(α) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$. Συνεπώς $P(A \cup B) \leq 0.8$. Η ισότητα ισχύει όταν $P(A \cap B) = 0$.

Ομοίως, $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) \leq P(A) + P(C)$. Αλλά $P(A) + P(C) > 1$. Συνεπώς $P(A \cup C) \leq 1$. Η ισότητα ισχύει όταν $P(A \cap C) = 0.3$.

(β) Εφόσον $A \subset A \cup B$ και $B \subset A \cup B$ ξέρουμε ότι $P(A) \leq P(A \cup B)$, $P(B) \leq P(A \cup B)$. $\max\{P(A), P(B)\} = 0.6$. Άρα $0.6 \leq P(A \cup B)$. Η ισότητα ισχύει όταν $B \subset A$.

Ομοίως, εφόσον $\max\{P(A), P(C)\} = 0.7$, $0.7 \leq P(A \cup C)$. Η ισότητα ισχύει όταν $A \subset C$.

(γ) Εφόσον $A \cap B \subset A$ και $A \cap B \subset B$ ισχύει $P(A \cap B) \leq P(A)$, $P(A \cap B) \leq P(B)$. $\min\{P(A), P(B)\} = 0.2$ άρα $P(A \cap B) \leq 0.2$. Η ισότητα ισχύει όταν $B \subset A$.

Ομοίως, $P(A \cap C) \leq \min\{P(A), P(C)\} = 0.6$. Η ισότητα ισχύει όταν $A \subset C$.

(δ) Η μικρότερη δυνατή τιμή της $P(A \cap B) = 0$ όταν τα A και B είναι ξένα μεταξύ τους. Η μικρότερη δυνατή τιμή της $P(A \cap C) = 0.3$ και σε αυτή τη περίπτωση $P(A \cup C) = 1$ όπως δείχτηκε στο ερώτημα (α).

Ανακεφαλαιώνοντας, $0.6 \leq P(A \cup B) \leq 0.8$ όπου η μικρότερη τιμή ισχύει όταν $B \subset A$ (άρα $P(A \cap B) = P(B) = 0.2$ έχει τη μεγαλύτερη τιμή), ενώ η μεγαλύτερη τιμή 0.8 της $P(A \cup B)$ εμφανίζεται όταν η $P(A \cap B)$ έχει τη μικρότερη δυνατή τιμή 0 .

Ομοίως, $0.6 \leq P(A \cup C) \leq 1$ όπου η μικρότερη τιμή ισχύει όταν $A \subset C$ (άρα $P(A \cap C) = P(A) = 0.6$ έχει τη μεγαλύτερη τιμή), ενώ η μεγαλύτερη τιμή 1 της $P(A \cup C)$ εμφανίζεται όταν η $P(A \cap C)$ έχει τη μικρότερη δυνατή τιμή 0.3 .

Άσκηση 3.

(α) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$. Συνεπώς $P(A \cap (B \cup C)) = 0$.

(β) Ισχύει ότι $P(A \cap (B \cup C)) = P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$ όπου $P(A \cap B) = 0.2$ και $P(A \cap C) = 0.3$.

Άρα αρκεί να υπολογίσουμε τη πιθανότητα $P(A \cap B \cap C)$. Παρατηρούμε ότι $P(B \cup C)$ που γενικά έχει τη τιμή $P(B) + P(C) - P(B \cap C)$ τυχαίνει να είναι ίση με $P(B) + P(C)$, άρα θα πρέπει $P(B \cap C) = 0$, και συνεπώς $P(A \cap B \cap C) = 0$. Άρα $P(A \cap (B \cup C)) = P(A \cap B) + P(A \cap C) = 0.5$.

Άσκηση 4.

(α) Στο ζάρι υπάρχουν 3 επιφάνειες με ζυγό αριθμό και 3 επιφάνειες με περιττό αριθμό. Κάθε επιφάνεια είναι ισοπίθανη, οπότε η πιθανότητα το f_1 να είναι ζυγός είναι 0.5.

(β) Ο δειγματοχώρος αποτελείται από ένα αριθμήσιμα άπειρο αριθμό αποτελεσμάτων, όπου το γεγονός $A_{k,l} = \{f_1 = k \text{ και } f_2 = l\}$ αποτελείται από όλα τα αποτελέσματα της μορφής $kl, kkl, kkk, \dots, k^n l, \dots$ όπου $l \neq k$. Προφανώς,

$$P(A_{(k,l)}) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 + \dots = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^k = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1}{30}.$$

Συνεπώς μπορούμε να δουλέψουμε με ένα πιο απλό μοντέλο για το δειγματοχώρο:

$$\Omega = \{(k, l) : k \neq l, k = 1, \dots, 6, l = 1, \dots, 6\}$$

που αποτελείται από 30 ισοπίθανα αποτελέσματα. Υπάρχουν 6 αποτελέσματα που συνθέτουν το γεγονός ότι και τα δύο f_1 και f_2 είναι ζυγοί (δηλαδή τα $(2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 6), (6, 2)$ και $(6, 4)$). Οπότε η πιθανότητα το f_1 και f_2 να είναι και τα δύο ζυγοί ισούται με $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.

(β) Το πλήθος των αποτελεσμάτων που συνθέτουν το γεγονός $f_1 + f_2 \leq 7$ μπορεί πολύ εύκολα να υπολογιστεί: Αν $f_1 = 1$, τότε το f_2 μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. Αν $f_1 = 2$, τότε το f_2 μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα $\{1, 3, 4, 5\}$. Αν $f_1 = 3$, τότε το f_2 μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα $\{1, 2, 4\}$. Αν $f_1 = 4$, τότε το f_2 μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα $\{1, 2, 3\}$. Αν $f_1 = 5$, τότε το f_2 μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα $\{1, 2\}$. Αν $f_1 = 6$, τότε το f_2 μπορεί να είναι μόνο $\{1\}$. Άρα ισχύει $f_1 + f_2 \leq 7$ αν (f_1, f_2) είναι οποιοδήποτε από τα ανωτέρω $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ αποτελέσματα στο Ω . Συνεπώς η πιθανότητα αυτού του γεγονότος είναι $\frac{15}{30} = 0.5$.

Άσκηση 5.

(α) Ορίζουμε $\mathcal{N}$ τη νίκη και $\mathcal{H}$ την ήττα σε ένα σετ. Κερδίζετε τον αγώνα όταν το αποτέλεσμα είναι ένα από τα: $(\mathcal{N}, \mathcal{N}, \mathcal{N})$, $(\mathcal{N}, \mathcal{N}, \mathcal{H})$, $(\mathcal{H}, \mathcal{N}, \mathcal{N})$. Αφού $P(\mathcal{N}, \mathcal{N}, \mathcal{N}) = p_1 p_2 p_3$, $P(\mathcal{N}, \mathcal{N}, \mathcal{H}) = p_1 p_2 (1 - p_3)$ και $P(\mathcal{H}, \mathcal{N}, \mathcal{N}) = (1 - p_1) p_2 p_3$, η πιθανότητα να κερδίσετε τον αγώνα είναι ίση με το άθροισμα $p_1 p_2 + p_2 p_3 - p_1 p_2 p_3$.

Ένας διαφορετικός τρόπος υπολογισμού είναι ο ακόλουθος: Ορίζουμε A το γεγονός ότι κερδίζετε τα πρώτα 2 σετ και B το γεγονός ότι κερδίζετε τα 2 τελευταία σετ. Τότε, κερδίζετε τον αγώνα αν συμβαίνει το γεγονός $A \cup B$, το οποίο έχει πιθανότητα $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = p_1 p_2 + p_2 p_3 - p_1 p_2 p_3$ εφόσον $A \cap B$ είναι το γεγονός της νίκης των τριών σετ. Σημειώστε ότι έχετε την ίδια πιθανότητα να κερδίσετε τον αγώνα εάν παίζετε με τους αντίπαλους με αντίθετη σειρά 3, 2, 1: σημασία έχει με ποιον παίζετε στο δεύτερο σετ.

(β) Είναι προφανές ότι για να κερδίσετε τον αγώνα, πρέπει να κερδίσετε οπωσδήποτε το δεύτερο σετ, άρα είναι αναμενόμενο ότι θα πρέπει να διαλέξετε τον ευκολότερο αντίπαλο στο δεύτερο σετ. Όπως παρατηρήθηκε στο πρώτο ερώτημα, οποιονδήποτε από τους άλλους 2 αντίπαλους και να διαλέξετε

να παίζετε στο πρώτο σετ, δεν επηρεάζει την πιθανότητα νίκης στον αγώνα. Και όντως η μαθηματική ανάλυση στηρίζει αυτή τη διαίσθηση: Έστω P_i η πιθανότητα να κερδίσετε τον αγώνα όταν παίζετε με τον αντίπαλο i στο δεύτερο σετ. Εύκολα προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} P_1 &= p_1 p_2 + p_1 p_3 - p_1 p_2 p_3, \\ P_2 &= p_1 p_2 + p_2 p_3 - p_1 p_2 p_3, \\ P_3 &= p_1 p_3 + p_2 p_3 - p_1 p_2 p_3. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $P_i > P_j$ αν και μόνο αν $p_i > p_j$. Συνεπώς η πιθανότητα να κερδίσετε τον αγώνα μεγιστοποιείται όταν παίζετε με τον αντίπαλο i στο δεύτερο σετ όπου $p_i = \max\{p_1, p_2, p_3\}$.

Άσκηση 6.

$$(a) P(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log_e 2)^n}{2(n!)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log_e 2)^n}{n!} = \frac{1}{2} \exp(\log_e 2) = 1.$$

$$(b) P(n \text{ είναι ζυγός}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log_e 2)^{2n}}{2(2n!)}. \text{ Ισχύει } \exp(x) + \exp(-x) = 2\cosh(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)). \text{ Άρα, } P(n \text{ είναι ζυγός}) = (1/4)[\exp(\log_e 2) + \exp(-\log_e 2)] = 5/8.$$

Άσκηση 7.

(a) Θέτουμε $P(K) = p$ οπότε $P(G) = 1 - p = q$. Τότε,

$$P(C) = P(K) + P(GGGGK) + P(GGGGGGGGK) + \dots = p + q^4 p + q^8 p + \dots = p \sum_{k=0}^{\infty} (q^4)^k = \frac{p}{1 - q^4}.$$

Ομοίως,

$$P(S) = P(GK) + P(GGGGGK) + P(GGGGGGGGGK) + \dots = qp + q^5 p + q^9 p + \dots = pq \sum_{k=0}^{\infty} (q^4)^k = \frac{pq}{1 - q^4}.$$

Ομοίως, έχουμε ότι $P(A) = \frac{pq^2}{1 - q^4}$ και $P(M) = \frac{pq^3}{1 - q^4}$. Δεδομένου ότι $1 - q^4 = (1 - q)(1 + q + q^2 + q^3)$, τα παραπάνω μπορούν να γραφτούν ως: $P(C) = \frac{1}{1 + q + q^2 + q^3}$, $P(S) = \frac{q}{1 + q + q^2 + q^3}$, $P(A) = \frac{q^2}{1 + q + q^2 + q^3}$ και $P(M) = \frac{q^3}{1 + q + q^2 + q^3}$.

(b) Αφού $q < 1$, έχουμε ότι $P(C) > P(S) > P(A) > P(M)$ γεγονός που δείχνει ότι η Μελίνα δεν θα πρέπει να είναι πολύ χαρούμενη. Επίσης είναι προφανές ότι $P(C) + P(S) + P(A) + P(M) = 1$.