

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 4/10/2010

Ημερομηνία Παράδοσης: 13/10/2010

Άσκηση 1. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(A \cup (B^c \cup C^c)^c)$ σε κάθε μία από τις επόμενες περιπτώσεις:

- (α) Τα A , B , και C είναι ξένα μεταξύ τους γεγονότα και $P(A) = 1/3$.
- (β) $P(A) = 2P(B \cap C) = 4P(A \cap B \cap C) = 1/2$.
- (γ) $P(A) = 1/2$, $P(B \cap C) = 1/3$, και $P(A \cap C) = 0$.
- (δ) $P(A^c \cap (B^c \cup C^c)) = 0.6$.

Άσκηση 2. A , B , και C είναι γεγονότα με πιθανότητες 0.6, 0.2, και 0.7, αντίστοιχα.

- (α) Ποιες είναι οι μέγιστες δυνατές τιμές των πιθανοτήτων $P(A \cup B)$ και $P(A \cup C)$;
- (β) Ποιες είναι οι ελάχιστες δυνατές τιμές των πιθανοτήτων $P(A \cup B)$ και $P(A \cup C)$;
- (γ) Ποιες είναι οι μέγιστες δυνατές τιμές των πιθανοτήτων $P(A \cap B)$ και $P(A \cap C)$;
- (δ) Ποιες είναι οι ελάχιστες δυνατές τιμές των πιθανοτήτων $P(A \cap B)$ και $P(A \cap C)$;

Άσκηση 3. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(A \cap (B \cup C))$ σε κάθε μία από τις επόμενες περιπτώσεις:

- (α) Τα A , B , και C είναι ξένα μεταξύ τους.
- (β) $P(C) = 0.35$, $P(A \cap B) = 0.2$, $P(A \cap C) = 0.3$, $P(B) = 0.25$, $P(B \cup C) = 0.6$.

Άσκηση 4. Ρίχνουμε ένα δίκαιο εξαέδρο ζάρι μία φορά. Συμβολίζουμε με $f_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ το αποτέλεσμα της ρίψης. Στη συνέχεια ρίχνουμε συνεχώς το ζάρι μέχρις ότου έρθει αποτέλεσμα, f_2 , το οποίο είναι *διαφορετικό* από το f_1 .

- (α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι το f_1 είναι ζυγός.
- (β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι και το f_1 και το f_2 είναι ζυγοί.
- (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι $f_1 + f_2 \leq 7$.

Άσκηση 5. Σε ένα ασυνήθιστο παιχνίδι τένις, παίζετε από ένα σετ εναντίον τριών αντιπάλων (1, 2, 3) με αυτή τη σειρά και κερδίζετε το παιχνίδι αν κερδίσετε σε *δύο συνεχόμενα* σετ. Οι πιθανότητες να κερδίσετε ενάντια σε αυτούς τους 3 αντιπάλους είναι p_1 , p_2 , και p_3 , αντίστοιχα.

- (α) Υπολογίστε την πιθανότητα να κερδίσετε το παιχνίδι.
- (β) Έστω τώρα ότι μπορείτε να επιλέξετε τη σειρά με την οποία παίζετε εναντίον των 3 αντιπάλων. Δείξτε ότι αν επιλέξετε να παίζετε τον ευκολότερο αντίπαλο στο δεύτερο σετ, μεγιστοποιείτε την πιθανότητα να κερδίσετε το παιχνίδι.

Άσκηση 6. Έστω $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ ένας αριθμήσιμα άπειρος δειγματοχώρος ενός πειράματος τύχης με νόμο πιθανοτήτων $P(n) = \frac{(\log_e 2)^n}{2(n!)}$ για κάθε $n \geq 0$.

(α) Δείξτε ότι αυτός ο νόμος πιθανοτήτων ικανοποιεί το δεύτερο αξίωμα, $P(\Omega) = 1$.

(β) Δείξτε ότι η πιθανότητα το αποτέλεσμα του πειράματος τύχης να είναι ζυγός αριθμός ισούται με $5/8$. (Προσοχή: μη ξεχνάτε ότι το 0 είναι ζυγός.)

Άσκηση 7. Ο Χρήστος, η Σοφία, ο Ανδρέας, και η Μελίνα ρίχνουν (με αυτή τη σειρά) ένα κέρμα με πιθανότητα κεφαλής $P(K) = p$, $0 < p < 1$. Ο πρώτος που θα φέρει κεφαλή, κερδίζει το παιχνίδι.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα με την οποία κερδίζει κάθε παίκτης ($P(C)$, $P(S)$, $P(A)$, και $P(M)$), αντίστοιχα για τους Χρήστο, Σοφία, Ανδρέα, και Μελίνα).

(β) Δείξτε ότι $P(C) > P(S) > P(A) > P(M)$. Πόσο χαρούμενη μπορεί να είναι η Μελίνα;