Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
28 Νοεμβρίου 2009 - Διάρκεια: 2 Ώρες

Θέμα 1 - 50 μονάδες: Ένα *potpourri* από απλά προβλήματα πιθανοτήτων. Στις παρακάτω ερωτήσεις επιλέξτε τη σωστή απάντηση και αιτιολογείστε πλήρως την επιλογή σας.

(α) Ποια από τις επόμενες προτάσεις ΔΕΝ είναι σωστή;

(i) Αν $A \subset B$, τότε $P(A) \leq P(B)$.
(ii) Αν $P(B) > 0$, τότε $P(A/B) \geq P(A)$.
(iii) $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.
(iv) $P(A \cap B^c) = P(A \cup B) - P(B)$.

(β) Ρίχνουμε n όμοιες μπάλες σε m δοχεία με τυχαίο τρόπο. Κάθε μπάλα πέφτει με ίδια πιθανότητα μέσα σε κάθε ένα από τα m δοχεία και κάθε ρίψη είναι ανεξάρτητη από όλες τις άλλες. Ποια είναι η πιθανότητα ότι το i-στό δοχείο θα είναι άδειο μετά τη ρίψη όλων των μπαλών;

(i) $(1 - \frac{1}{m})^n$ (ii) $(1 - \frac{1}{n})^m$ (iii) $\binom{m}{n}(1 - \frac{1}{n})^m$ (iv) $\binom{n}{m}(\frac{1}{m})^n$

(γ) Ρίχνουμε δύο φορές το ίδιο δίκαιο κέρμα. Αν το αποτέλεσμα των δύο ρίψεων είναι το ίδιο, κερδίζουμε, αλλιώς χάνουμε. Έστω A το γεγονός ότι η πρώτη ρίψη έφερε Κεφαλή, B το γεγονός ότι η δεύτερη ρίψη έφερε Κεφαλή και C το γεγονός ότι κερδίζουμε. Ποια από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστή;

(i) Τα γεγονότα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.
(ii) Τα γεγονότα A και C είναι ανεξάρτητα.
(iii) Τα γεγονότα A και B είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα δεδομένου του C.
(iv) $P(C) = 3/4$.

(δ) Ένα πειραγμένο κέρμα φέρνει Κεφαλή με πιθανότητα 1/3. Έστω X το πλήθος των Κεφαλών που έρχονται σε 5 ανεξάρτητες ρίψεις του κέρματος. Ποια είναι η πιθανότητα η πρώτη ρίψη να φέρει Κεφαλή δεδομένου ότι $\{X = 1 \text{ ή } X = 5\}$;

(i) $\frac{\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^4}{5\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^4+(\frac{1}{3})^5}$ (ii) $\frac{\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^4}{\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^4+(\frac{1}{3})^5}$ (iii) $\frac{\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^4+(\frac{1}{3})^5}{5\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^4+(\frac{1}{3})^5}$ (iv) $\frac{1}{5}$

(ε) Μία τράπουλα με 52 φύλλα, μοιράζεται σε δύο παίκτες, από 26 φύλλα στον καθένα. Ποια είναι η πιθανότητα ότι ο πρώτος παίκτης θα πάρει όλους τους άσσους;

(i) $\frac{\binom{48}{22}}{\binom{52}{26}}$ (ii) $\frac{4\binom{48}{22}}{\binom{52}{26}}$ (iii) $\frac{48!}{22!}\frac{52!}{26!}$ (iv) $\frac{4!\binom{48}{22}}{\binom{52}{26}}$

(στ) Έστω τρεις ανεξάρτητες τ.μ. X, Y και Z. Τότε οι X και $Y + Z$ είναι:

(i) πάντα
(ii) μερικές φορές
(iii) ποτέ

ανεξάρτητες.

(ζ) Για να πάρει άδεια οδήγησης, η Μαρία πρέπει να περάσει το τεστ οδήγησης. Κάθε φορά που προσπαθεί, η Μαρία περνά το τεστ με πιθανότητα $1/2$, ανεξάρτητα από προσπάθεια σε προσπάθεια. Η Μαρία απέτυχε στην πρώτη προσπάθεια. Δεδομένου αυτού, ορίζουμε ως Y τα επιπλέον τεστ που η Μαρία θα πάρει μέχρις ότου πετύχει. Τότε:

(i) $E[Y] = 1$.
(ii) $E[Y] = 2$.
(iii) $E[Y] = 0$.

(η) Έστω δύο διακριτές τ.μ. X και Y, όπου κάθε μία παίρνει τιμές $\{1, 2, 3\}$. Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας είναι $p_{X,Y}(x, y) = 0$, αν $(x, y) \in \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$ και $p_{X,Y}(x, y) > 0$, αν $(x, y) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$. Τότε:

(i) Οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες.
(ii) Οι τ.μ. X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

(θ) Έστω 4 ανεξάρτητες τ.μ. Bernoulli, X_i; $i = 1, \ldots, 4$, με παραμέτρο $p = 0.1$. Ορίζουμε την τ.μ. $X = \sum_{i=1}^{4} X_i$. Τότε:

(i) $E[X_1/X = 2] = 0.1$.
(ii) $E[X_1/X = 2] = 0.5$.
(iii) $E[X_1/X = 2] = 0.25$.

(ι) Οι ανεξάρτητες τ.μ. X και Y είναι Διωνυμικές με παραμέτρους $(n = 10, p)$ και $(n = 5, q)$, αντίστοιχα. Δηλαδή $X \sim \Delta(10, p)$ και $Y \sim \Delta(5, q)$. Η διασπορά της τ.μ. $Z = 3 + 2X + 5Y$ είναι:

(i) $20p(1 - p) + 25q(1 - q)$.
(ii) $9 + 40p(1 - p) + 125q(1 - q)$.
(iii) $40p(1 - p) + 125q(1 - q)$.

Θέμα 2 - 50 μονάδες.

Η Αλίκη και ο Βασίλης θέλουν να αγοράσουν από ένα ποδήλατο. Το κατάστημα διαθέτει 4 πράσινα, 3 κίτρινα και 2 κόκκινα ποδήλατα. Η Αλίκη επιλέγει τυχαία ένα ποδήλατο και το αγοράζει. Αμέσως μετά το ίδιο κάνει και ο Βασίλης. Η τιμή του πράσινου, κίτρινου και κόκκινου ποδήλατου είναι 300, 200 και 100 ευρώ, αντίστοιχα. Έστω Α το γεγονός ότι η Αλίκη αγόρασε ένα πράσινο ποδήλατο και Β το γεγονός ότι ο Βασίλης αγόρασε ένα πράσινο ποδήλατο.

(α) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B/A)$ και $P(B)$.

(β) Είναι τα γεγονότα Α και Β ανεξάρτητα; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι τουλάχιστον ένας από τους δύο αγόρασε πράσινο ποδήλατο;

(δ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η Αλίκη και ο Βασίλης αγόρασαν ποδήλατα με διαφορετικό χρώμα;

(ε) Ορίστε την τυχαία μεταβλητή X ως το ποσό που πλήρωσε η Αλίκη. Υπολογίστε την κατανομή της X, δεδομένου ότι ο Βασίλης αγόρασε πράσινο ποδήλατο. Δηλαδή, υπολογίστε τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $p_{X/B}(x)$. Επίσης, υπολογίστε τη μέση τιμή της X δεδομένου του Β.