

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
7 Σεπτεμβρίου 2010 - Διάρκεια: 3 Ώρες

Θέμα 1 - 25 μονάδες. Βασικές έννοιες συνεχών τ.μ.

Η συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (ΣΠΠ)

$$f_X(x) = \begin{cases} ce^x & \text{για } 0 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της ΣΠΠ της X και υπολογίστε τη σταθερά c .

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X \leq 3 \mid 2 \leq X \leq 6)$.

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(2 \leq X \leq 6 \mid X > 3)$.

Θέμα 2 - 25 μονάδες. Ολική πιθανότητα και κανόνας του Bayes.

Ο webserver του Τμήματος μπορεί να δουλεύει (γεγονός W) ή να μην δουλεύει (γεγονός W^c). Μας δίδεται ότι $P(W) = 0.8$. Μία προσπάθεια πρόσβασης στον webserver είναι αποτυχημένη (γεγονός F) ή επιτυχημένη (γεγονός F^c). Προφανώς, $P(F/W^c) = 1$, αλλά ακόμα και αν ο webserver δουλεύει, μία προσπάθεια πρόσβασης μπορεί να είναι αποτυχημένη λόγω συμφόρησης του δικτύου. Μας δίδεται ότι $P(F^c/W) = 0.9$.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος μίας αποτυχημένης προσπάθειας πρόσβασης στον webserver, $P(F)$.

(β) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι ο webserver δουλεύει δεδομένου ότι η προσπάθεια πρόσβασης ήταν αποτυχημένη, $P(W/F)$.

Τώρα υποθέστε ότι δύο διαδοχικές προσπάθειες πρόσβασης στον webserver είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες μεταξύ τους δεδομένου ότι ο webserver δουλεύει και ομοίως όταν ο webserver δεν δουλεύει, δηλαδή ισχύει ότι $P(F_1 F_2 / W) = P(F_1 / W) P(F_2 / W)$.

(γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι η δεύτερη προσπάθεια πρόσβασης αποτυγχάνει δεδομένου ότι η πρώτη προσπάθεια πρόσβασης έχει αποτύχει, $P(F_2 / F_1)$.

(δ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι ο webserver δουλεύει δεδομένου ότι τόσο η πρώτη όσο και η δεύτερη προσπάθεια πρόσβασης αποτυγχάνουν, $P(W / F_1 F_2)$.

Θέμα 3 - 25 μονάδες. Κανονική κατανομή.

Η τ.μ. X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 10$ και διασπορά $\sigma^2 = 16$: $X \sim N(10, 16)$. Υπολογίστε τις ακόλουθες πιθανότητες εκφράζοντας την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(x)$:

(α) $P(X \geq 15)$.

(β) $P(X \leq 5)$.

(γ) $P(X^2 \geq 400)$.

(δ) $P(X = 2)$.

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Συναρτήσεις Τυχαίων Μεταβλητών.

Η συνεχής τυχαία μεταβλητή X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη με μέση τιμή 1 και διασπορά 3.

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της X και υπολογίστε την πιθανότητα $P(X < 0)$.

(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή $E(|X|)$.

Ορίζουμε την νέα τ.μ. $Y = |X|$.

(γ) Δώστε τη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού $Y = |X|$.

(δ) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Y(y)$, της Y και δώστε τη γραφική παράστασή της.

(ε) Υπολογίστε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_Y(y)$, της Y και δώστε τη γραφική παράστασή της.