

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2009
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τελικής Εξέτασης

26 Ιανουαρίου 2010

Θέμα 1.

(α) Έχουμε:

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x) = \begin{cases} 3\alpha^3 x^{-4}, & x \geq \alpha \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(β) Η μέση τιμή υπολογίζεται ως εξής:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{\alpha}^{+\infty} x 3\alpha^3 x^{-4} dx = \int_{\alpha}^{+\infty} 3\alpha^3 x^{-3} dx = 3\alpha^3 \left(-\frac{1}{2} x^{-2} \right) \Big|_{\alpha}^{+\infty} = \frac{3\alpha}{2}$$

Επίσης, η δεύτερη ροπή της X είναι:

$$E[X^2] = \int_{\alpha}^{+\infty} x^2 3\alpha^3 x^{-4} dx = 3\alpha^3 \int_{\alpha}^{+\infty} x^{-2} dx = 3\alpha^3 \left(-x^{-1} \right) \Big|_{\alpha}^{+\infty} = 3\alpha^2$$

Επομένως, η διασπορά της X είναι:

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 3\alpha^2 - \left(\frac{3\alpha}{2} \right)^2 = \frac{3\alpha^2}{4}$$

(γ)

$$P(X \leq 2\alpha) = F_X(2\alpha) = 1 - \frac{\alpha^3}{(2\alpha)^3} = \frac{7}{8} = 0.875$$

(δ)

$$P(|X| \leq 3\alpha) = P(-3\alpha \leq X \leq 3\alpha) = F_X(3\alpha) - F_X(-3\alpha) = 1 - \frac{\alpha^3}{(3\alpha)^3} - 0 = \frac{26}{27} = 0.963$$

(ε)

$$\begin{aligned} P(X > 2\alpha | |X| \leq 3\alpha) &= \frac{P(X > 2\alpha \cap |X| \leq 3\alpha)}{|X| \leq 3\alpha} = \frac{P(2\alpha < X \leq 3\alpha)}{|X| \leq 3\alpha} = \\ &= \frac{F_X(3\alpha) - F_X(2\alpha)}{\frac{26}{27}} = \frac{1 - \frac{\alpha^3}{(3\alpha)^3} - 1 + \frac{\alpha^3}{(2\alpha)^3}}{\frac{26}{27}} = \frac{\frac{26}{27} - \frac{7}{8}}{\frac{26}{27}} = 0.0913 \end{aligned}$$

Θέμα 2.

Έστω τα γεγονότα $A = \{\text{επιλέχθηκε ο τροχός Α}\}$ και $B = \{\text{επιλέχθηκε ο τροχός Β}\}$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του *Bayes*, έχουμε ότι

$$P(A|X < \frac{1}{4}) = \frac{P(A)P(X < \frac{1}{4}|A)}{P(X < \frac{1}{4})} = \frac{P(A)P(X < \frac{1}{4}|A)}{P(A)P(X < \frac{1}{4}|A) + P(B)P(X < \frac{1}{4}|B)}$$

Από την εκφώνηση έχουμε ότι

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(X < \frac{1}{4}/A) = P(Y < \frac{1}{4}) = \int_0^{\frac{1}{4}} f_Y(y)dy = \int_0^{\frac{1}{4}} 1dy = \frac{1}{4}$$

$$P(X < \frac{1}{4}/B) = P(W < \frac{1}{4}) = \int_0^{\frac{1}{4}} f_W(w)dw = \int_0^{\frac{1}{4}} 3dw = \frac{3}{4}$$

Συνεπώς,

$$P(A/X < \frac{1}{4}) = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{3}{4}} = \frac{1}{4}.$$

Θέμα 3.

(α1)

$$\begin{aligned} P(|X - 4| > 3) &= P(X - 4 > 3 \text{ ή } X - 4 < -3) = P(X > 7 \text{ ή } X < 1) = P(X > 7) + P(X < 1) = \\ &= 1 - P\left(\frac{X - 2}{5} < \frac{7 - 2}{5}\right) + P\left(\frac{X - 2}{5} < \frac{1 - 2}{5}\right) = 1 - \Phi(1) + \Phi(-0.2) = 2 - \Phi(1) - \Phi(0.2) = 0.5794 \end{aligned}$$

(α2)

$$P(X < 3/X > 2) = \frac{P(X < 3 \cap X > 2)}{P(X > 2)} = \frac{P(2 < X < 3)}{P(X > 2)} = \frac{P(\frac{2-2}{5} < \frac{X-2}{5} < \frac{3-2}{5})}{1 - P(\frac{X-2}{5} < \frac{2-2}{5})}$$

$$\frac{\Phi(0.2) - \Phi(0)}{1 - \Phi(0)} = \frac{\Phi(0.2) - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2(\Phi(0.2) - 0.5) = 0.1586.$$

(β)

Έστω X_i η διαφορά των πόντων κάθε περιόδου, $i = 1, 2, 3, 4$. Τότε $X_i \sim N(1.5, 6)$ και οι X_i είναι ανεξάρτητες Γκαουσιανές τ.μ.

(β1)

$$P(\beta 1) = P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 0\right)$$

Αλλά

$$\sum_{i=1}^4 X_i \sim N(4 \times 1.5, 4 \times 6) \equiv N(6, 24)$$

Συνεπώς,

$$P(\beta 1) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^4 X_i - 6}{\sqrt{24}} > \frac{0 - 6}{\sqrt{24}}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{6}{\sqrt{24}}\right) = \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{24}}\right) = 0.8897$$

(β2)

$$P(\beta 2) = P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 0/X_1 + X_2 = -5\right) = P(-5 + X_3 + X_4 > 0) = P(X_3 + X_4 > 5)$$

Αλλά $X_3 + X_4 \sim N(3, 12)$, συνεπώς:

$$P(\beta_2) = P\left(\frac{X_3 + X_4 - 3}{\sqrt{12}} > \frac{5 - 3}{\sqrt{12}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{12}}\right) = 0.2818$$

(β3)

$$P(\beta_3) = P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 0 / X_1 = 5\right) = P(5 + X_2 + X_3 + X_4 > 0) = P(X_2 + X_3 + X_4 > -5)$$

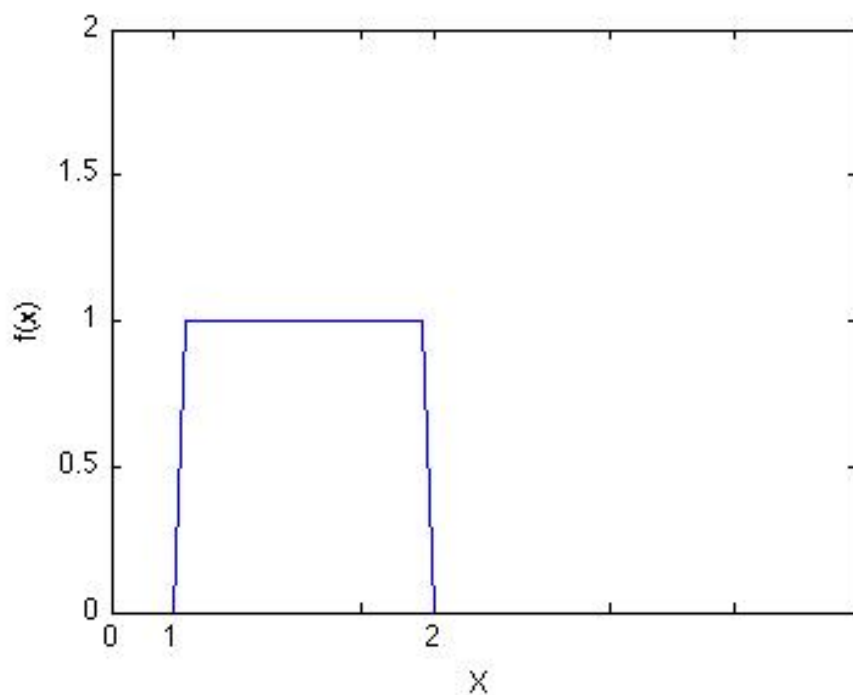
Αλλά $X_2 + X_3 + X_4 \sim N(4.5, 18)$, οπότε:

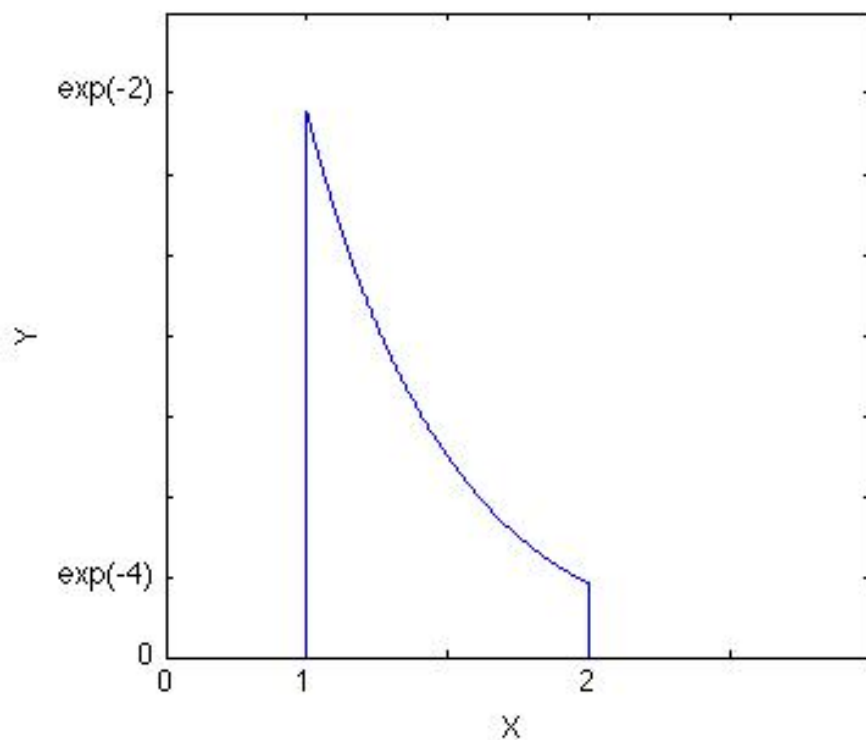
$$P(\beta_3) = P\left(\frac{X_2 + X_3 + X_4 - 4.5}{\sqrt{18}} > \frac{-5 - 4.5}{\sqrt{18}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-9.5}{\sqrt{18}}\right) = \Phi\left(\frac{9.5}{\sqrt{18}}\right) = 0.9874$$

Θέμα 4.

(α)

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X καθώς και ο μετασχηματισμός $Y = g(X)$ φαίνονται στις επόμενες γραφικές παραστάσεις:



**(β)**

Προφανώς από το σχήμα φαίνεται ότι η τ.μ. Y παίρνει τιμές στο διάστημα $[e^{-4}, e^{-2}]$.

- Για $y < e^{-4}$, έχουμε $F_Y(y) = 0$

- Για $y \geq e^{-2}$, έχουμε $F_Y(y) = 1$

- Για $e^{-4} \leq y < e^{-2}$, έχουμε

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(e^{-2X} < y) = P(-2X < \ln y) = P(X > -\frac{1}{2} \ln y) =$$

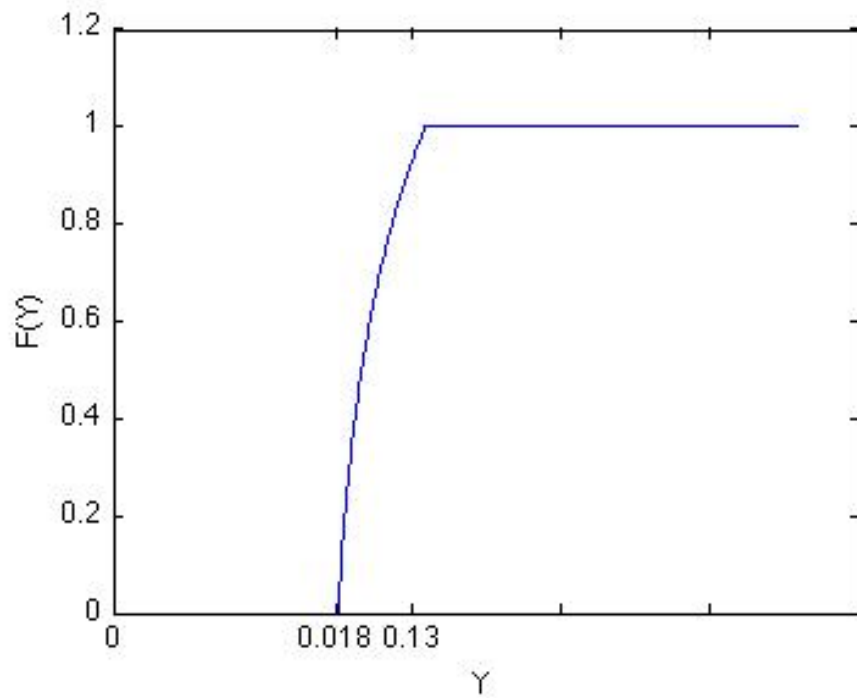
$$= \int_{-\frac{1}{2} \ln y}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_{-\frac{1}{2} \ln y}^2 1 dx = 2 + \frac{1}{2} \ln y$$

Τελικά,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < e^{-4} \\ 2 + \frac{1}{2} \ln y, & e^{-4} \leq y < e^{-2} \\ 1, & y \geq e^{-2} \end{cases}$$

(γ)

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y}{dy}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y}, & e^{-4} \leq y \leq e^{-2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



(6)

$$P(Y \leq e^{-3}) = F_Y(e^{-3}) = 2 + \frac{1}{2} \ln(e^{-3}) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

