

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
26 Ιανουαρίου 2010 - Διάρκεια: 3 Ώρες

Θέμα 1 - 25 μονάδες. Βασικές έννοιες συνεχών τ.μ.

Μία συνεχής τ.μ. X έχει αθροιστική συνάρτηση κατανομής (ΑΣΚ)

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a^3}{x^3}, & x \geq a, \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου a είναι μία θετική σταθερά.

- (α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X .
- (β) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $E[X]$, και τη διασπορά, σ_X^2 , της X .
- (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X \leq 2a)$.
- (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(|X| \leq 3a)$.
- (ε) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(X > 2a \mid |X| \leq 3a)$.

Θέμα 2 - 25 μονάδες. Δένδρα και κανόνες του Bayes.

Επιλέγουμε μεταξύ δύο τροχών της τύχης, A και B , ρίχνοντας ένα δίκαιο κέρμα. Γυρίζουμε τον τροχό που έχει επιλεγεί οπότε προκύπτει η πειραματική τιμή της τ.μ. X . Οι τ.μ. Y και W μοντελοποιούν την μέτρηση που παίρνουμε από το γύρισμα του τροχού A και B , αντίστοιχα, και έχουν συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 < y \leq 1, \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

και

$$f_W(w) = \begin{cases} 3 & 0 < w \leq \frac{1}{3}, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Αν μας πουν ότι η πειραματική τιμή της τ.μ. X είναι μικρότερη του $\frac{1}{4}$, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι επιλέχθηκε ο τροχός A ;

Θέμα 3 - 25 μονάδες. Κανονική κατανομή.

(α) Η τ.μ. X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 2$ και διασπορά $\sigma^2 = 25$: $X \sim N(2, 25)$. Υπολογίστε τις ακόλουθες πιθανότητες εκφράζοντας την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(x)$:

(α1) $P(|X - 4| > 3)$.

(α2) $P(X < 3 \mid X > 2)$.

(β) Ένα στατιστικό μοντέλο που έχει προταθεί για το επαγγελματικό πρωτάθλημα μπάσκετ των ΗΠΑ προβλέπει ότι όταν συναντώνται δύο σχετικά ισοδύναμες ομάδες, ο αριθμός των πόντων που σκοράρει σε μία περίοδο η εντός έδρας ομάδα μείον τον αριθμό των πόντων που σκοράρει η φιλοξενούμενη ομάδα είναι μία κανονική τ.μ. με μέση τιμή 1.5 και διασπορά 6. Επίσης, το μοντέλο υποθέτει ότι οι διαφορές σκοραρίσματος κατά τις 4 περιόδους είναι ανεξάρτητες τ.μ.

Στη συνέχεια, εκφράστε την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(x)$.

(β1) Ποια η πιθανότητα να κερδίσει η εντός έδρας ομάδα;

(β2) Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει η εντός έδρας ομάδα δεδομένου ότι στο ημίχρονο είναι πίσω στο σκορ κατά 5 πόντους;

(β3) Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει η εντός έδρας ομάδα δεδομένου ότι στο τέλος της πρώτης περιόδου προηγείται με 5 πόντους;

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Συναρτήσεις Τυχαίων Μεταβλητών.

Η τυχαία μεταβλητή X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη μεταξύ των τιμών 1 και 2, δηλαδή $X \sim U[1, 2]$. Ορίζουμε την νέα τ.μ.

$$Y = e^{-2X}.$$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού $Y = e^{-2X}$ καθώς και αυτή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, $f_X(x)$, της X .

(β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Y(y)$, της Y και δώστε τη γραφική παράσταση της.

(γ) Υπολογίστε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_Y(y)$, της Y και δώστε τη γραφική παράσταση της.

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y \leq e^{-3})$.