ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2009
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Έβδομης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 14/12/2009 Ημερομηνία Παράδοσης: 07/01/2010

Άσκηση 1.
(α) $P\{X < 0\} = \Phi(\frac{0-(-10)}{2}) = \Phi(5) = 1 - Q(5)$
(β) $P\{-10 < X < 5\} = \Phi(\frac{5-(-10)}{2}) - \Phi(\frac{-10-(-10)}{2}) = \Phi(7.5) - \Phi(0) = \Phi(7.5) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - Q(7.5)$
(γ) $P\{|X| \geq 5\} = P\{X \leq -5\} + P\{X \geq 5\} = \Phi(\frac{-5-(-10)}{2}) + 1 - \Phi(\frac{5-(-10)}{2}) = \Phi(2.5) + 1 - \Phi(7.5) = 1 - Q(2.5) + Q(7.5)$
(δ) $P\{X^2 - 3X + 2 > 0\} = P\{(X-1)(X-2) > 0\} = P\{X < 1\} + P\{X > 2\} = \Phi(\frac{1-(-10)}{2}) + 1 - \Phi(\frac{2-(-10)}{2}) = \Phi(5.5) + 1 - \Phi(6) = 1 - Q(5.5) + Q(6)$

Άσκηση 2.
Ας υποθέσουμε ότι η $X \sim N(0.9, 0.003^2)$ δηλώνει το πλάτος (σε μm) του μεταλλικού ίχνους.

(α) $\{X < 0.9 - 0.005\}$ ή $\{X > 0.9 + 0.005\}$ για ενα μεταλλικό ίχνος που θεωρείται ελαττωματικό.
$P\{|X - 0.9| > 0.005\} = 2\Phi(-1.666...) = 2Q(1.666...) \approx 0.095$

(β) Πρέπει να βρούμε την μέγιστη τιμή του σ ώστε $2Q(0.005/\sigma) \leq 10^{-2}$. Επειδή $Q(2.575) \approx 0.005$, έχουμε $0.0005/\sigma > 2.575$, δηλαδή $\sigma \leq 0.005/2.575 \approx 0.00194$.

Άσκηση 3.
(α) Η Y παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$ και $F_y = 0$ για $v < 0$, και $F_y = 1$ για $v > 1$. Για $0 \leq v \leq 1$, $F_y(v) = P\{Y \leq v\} = P\{X^2 \leq v\} = P\{-\sqrt{v} \leq X \leq \sqrt{v}\} = \sqrt{v}$. Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) είναι $F_y(v) = \frac{1}{2\sqrt{v}}$ αν $0 \leq v \leq 1$, και $f_y(v) = 0$, αλλιώς.

(β) Η Z παίρνει τιμές στο διάστημα $[-1, +1]$, επομένως $F_z = 0$ για $v < -1$, και $F_z(v) = 1$ για $v > 1$.
Για $0 \leq v \leq 1$, $F_z(v) = P\{Z \leq v\} = P\{g(X) \leq v\} = P\{X \leq \sqrt{v}\} = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{v}]$.
Για $-1 \leq v \leq 0$, $F_z = P\{Z \leq v\} = P\{g(X) \leq v\} = P\{X \leq \sqrt{-v}\} = \frac{1}{2}[1 - \sqrt{-v}]$.
Επομένως, $f_z(v) = \frac{1}{4\sqrt{|v|}}$ αν $0 \leq |v| \leq 1$, και $f_z(v) = 0$, αλλιώς. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι άρτια και τείνει στο $+\infty$ καθώς το v τείνει στο 0.

Άσκηση 4.
(α) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Y είναι $p_y(a) = p_y(-a) = \frac{1}{2}$.

(β) $E[Z] = \int_0^\infty (u - a^2)\phi(u)du + \int_{-\infty}^0 (u + a^2)\phi(u)du = \int_{-\infty}^\infty (u^2 + a^2)\phi(u)du - 4\int_0^\infty au\phi(u)du = 1 + a^2 - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}a$ δεδομένου ότι η τυπική Γκαουσιανή κατανομή έχει διασπορά 1, το εμβαδόν κάτω από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\phi(u)$ είναι 1, και $\int_0^\infty uexp(-u^2/2)du = 1$.
Η $E[Z]$ έχει ελάχιστη τιμή $1 - \frac{2}{\pi}$ στο $a = \sqrt{2}/\pi$.

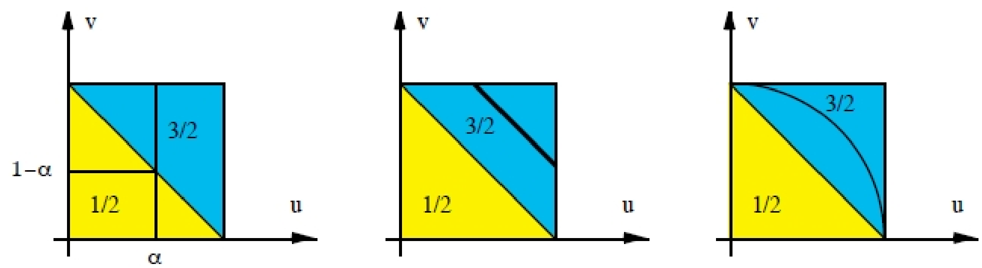
(γ) $p_W(3) = p_W(-3) = \Phi(-2.5) = 0.0062$.
$p_W(2) = p_W(-2) = \Phi(2.5) - \Phi(1.5) = 0.0606$.
$p_W(1) = p_W(-1) = \Phi(1.5) - \Phi(0.5) = 0.2417$.
$p_W(0) = \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) = 0.3830$.

(δ) Οι Z_2, Z_1, Z_0 είναι *Bernoulli* τυχαίες μεταβλητές με παραμέτρους $p_2 = P\{W < 0\} = 0.3085$, $p_1 = P\{W \in \{-2,-1,2,3\}\} = 0.3691$, και $p_0 = P\{W \in \{-3,-1,1,3\}\} = 0.4958$ αντίστοιχα.

Άσκηση 5.

Οι από κοινού συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (*pdf*) φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.

(α)



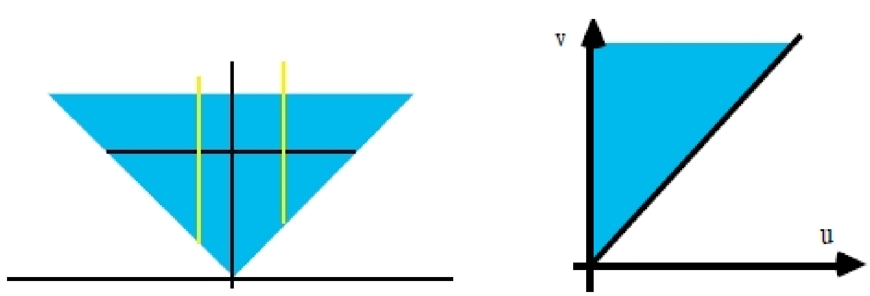
Σχήμα 1: Από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Από το αριστερό σχήμα παραπάνω, $f_X(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(a,v)dv = \int_0^{1-a} \frac{1}{2}dv + \int_{1-a}^{1} \frac{3}{2}dv = \frac{1}{2}(1-a) + \frac{3}{2}a = \frac{1}{2} + a$.

(β) Όταν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας έχει σταθερή τιμή σε μια περιοχή, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα ότι το τυχαίο σημείο βρίσκεται σε αυτήν την περιοχή βρίσκοντας την περιοχή του χώρου, την οποία πολαπλασιάζουμε με την τιμή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας. Επομένως, $P\{X+Y \leq 3/2\} = 1 - P\{X+Y \geq 3/2\} = 1 - \frac{3}{2} \times [\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}] = \frac{13}{16}$
και $P\{X^2+Y^2 \geq 1\} = \frac{3}{2} \times [1 - \frac{\pi}{4}] = \frac{3}{2} - \frac{3\pi}{8}$.

Άσκηση 6.

(α) Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι μη μηδενική στη γραμμοσκιασμένη περιοχή (δεξιά) του Σχήματος 2.



Σχήμα 2: Από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

(β) Για $u > 0$, $f_X(u) = \int_v^{\infty} 2exp(-u-v)dv = 2exp(-2u)$ και $f_X(u) = 0$ για $u < 0$.
Για $v > 0$, $f_X(v) = \int_v^{\infty} 2exp(-u-v)du = 2exp(-v) - 2exp(-2v)$ και $f_Y(v) = 0$ για $v < 0$.

(γ) Όχι, οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι εξαρτημένες.

(δ) $P\{Y > 3X\} = \int_{u=0}^{\infty}\int_{v=3u}^{\infty} 2exp(-u-v)dvdu = \int_{u=0}^{\infty} 2exp(-4u)du = \frac{1}{2}$.
(ε) Για $a > 0$, $P\{X + Y \leq a\} = \int_{u=0}^{a/2}\int_{v=u}^{a-u} 2e^{-u-v}dvdu = \int_{u=0}^{a/2} 2^{-u}[e^{-u} - e^{-a+u}]du = 1 - aexp(-a) - exp(-a)$.

(στ) $f_Z(a) = \frac{d}{da}F_Z(a) = \frac{d}{da}P\{X+Y \leq a\} = \frac{d}{da}1 - aexp(-a) - exp(-a) = aexp(-a)$ για $a > 0$ και $f_Z(a) = 0$ για $a < 0$.

Αποτελεί *Gamma* συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με παραμέτρους $(2, 1)$.