

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2009
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έβδομη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 14/12/2009

Ημερομηνία Παράδοσης: 07/01/2010

Άσκηση 1.

Έστω ότι η τ.μ. X ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή -10 και διασπορά $\sigma^2 = 4$, δηλαδή $X \sim N(-10, 4)$. Να υπολογίσετε τις παρακάτω πιθανότητες συναρτήσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής (ΑΣΚ) της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(x)$, με θετικά ορίσματα του x .

(α) $P(X < 0)$ (β) $P(-10 < X < 5)$ (γ) $P(|X| \geq 5)$ (δ) $P(X^2 - 3X + 2 > 0)$

Άσκηση 2.

Το πλάτος ενός μεταλλικού ίχνους σε μία πλακέτα ψηφιακού κυκλώματος μοντελοποιείται ως μια Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $\mu = 0.9 \mu m$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 0.003 \mu m$.

(α) Ίχνη που το πλάτος τους δεν βρίσκεται στο εύρος τιμών $0.9 \pm 0.005 \mu m$ είναι ελλατωματικά. Τι ποσοστό των ιχνών είναι ελλατωματικά;

(β) Μια νέα μέθοδος κατασκευής κυκλωμάτων, η οποία παράγει ίχνη με μικρότερες αποκλίσεις πλάτους, θέλουμε να μην παράγει παραπάνω από ένα ελλατωματικό ίχνος στα 100. Ποια πρέπει είναι η μέγιστη τιμή του σ για την νέα μέθοδο ώστε αυτή να πετυχαίνει το στόχο της;

Άσκηση 3.

Η τ.μ. X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[-1, +1]$.

(α) Βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) της τ.μ. $Y = X^2$.

(β) Βρείτε την pdf της τ.μ. $Z = g(X)$ όπου

$$g(u) = \begin{cases} u^2, & \text{αν } u \geq 0 \\ -u^2, & \text{αν } u < 0 \end{cases}$$

Άσκηση 4.

Ένας αναλογικο/ψηφιακός μετατροπέας (A/D converter) αναλογικού σε ψηφιακό σήμα αποτελείται από ένα δειγματολήπτη και ένα κβαντιστή. Το αναλογικό σήμα X μοντελοποιείται ως μία τυπική Γκαουσιανή τ.μ., $X \sim N(0, 1)$. Ο συγκεκριμένος $1-bit$ κβαντιστής που χρησιμοποιούμε μετασχηματίζει το αναλογικό σήμα X σε δύο τιμές ως εξής: $Y = \alpha$, αν $X > 0$ και $Y = -\alpha$, αν $X \leq 0$. Προφανώς, η Y είναι μία διακριτή τυχαία μεταβλητή.

(α) Ποιά είναι η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Y ;

(β) Το τετραγωνικό σφάλμα αναπαράστασης του X από το Y ορίζεται ως:

$$Z = \begin{cases} (X - \alpha)^2, & \text{αν } X > 0 \\ (X + \alpha)^2, & \text{αν } X \leq 0 \end{cases}$$

και προφανώς είναι και αυτό μία (συνεχής) τυχαία μεταβλητή. Θέλουμε να επιλέξουμε την τιμή του α έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα $E[Z]$. Υπολογίστε το $E[Z]$ συναρτήσει του α και στη συνέχεια πάρτε την παράγωγο ως προς α για να βρείτε την τιμή του α που ελαχιστοποιεί το $E[Z]$.

(γ) Τώρα σας ζητείται να σχεδιάσετε έναν 3-bit A/D μετατροπέα $2^3 = 8$ επιπέδων. Αυτός ο μετατροπέας κβαντοποιεί το X στον πιο κοντινό ακέραιο W στο εύρος -3 έως $+3$. Δηλαδή, $W = 3$ αν $X \geq 2.5$, $W = 2$ αν $1.5 \leq X \leq 2.5$, $W = 1$ αν $0.5 \leq X \leq 1.5$, ..., $W = -3$ αν $X < -2.5$. Το W είναι μία διακριτή τυχαία μεταβλητή. Βρείτε την συνάρτηση πιθανότητας του W .

(δ) Η έξοδος του A/D μετατροπέα είναι η 3-bit συμπλήρωμα ως προς 2 αναπαράσταση του W . Ας υποθέσουμε ότι η έξοδος είναι (Z_2, Z_1, Z_0) . Τότε η τριάδα $(0, 1, 0)$ αποτελεί την αναπαράσταση του $W = 2$, ενώ η τριάδα $(1, 1, 0)$ αποτελεί την αναπαράσταση του $W = -2$. Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας του Z_2 ; του Z_1 ; του Z_0 ; Σημειώστε ότι η τριάδα $(1, 0, 0)$ η οποία αντιστοιχεί στο -4 δεν είναι πιθανή έξοδος από αυτόν τον A/D μετατροπέα.

Άσκηση 5.

Οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν από κοινού pdf

$$f_{X,Y}(u, v) = \begin{cases} 0.5, & \text{αν } 0 \leq u < 1, 0 \leq v < 1 \text{ και } 0 \leq u+v < 1 \\ 1.5, & \text{αν } 0 \leq u < 1, 0 \leq v < 1 \text{ και } 1 \leq u+v < 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Βρείτε την περιθωριακή pdf του X , $f_X(x)$.

(β) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(X + Y \leq 3/2)$ και $P(X^2 + Y^2 \geq 1)$.

Άσκηση 6.

Οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν από κοινού pdf

$$f_{X,Y}(u, v) = \begin{cases} 2e^{-u-v}, & \text{αν } 0 < u < v < \infty \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Σχεδιάστε το $u-v$ επίπεδο και δείξτε την περιοχή όπου η $f_{X,Y}(u, v)$ παίρνει μη μηδενικές τιμές.

(β) Υπολογίστε τις περιθωριακές pdf των X και Y , $f_X(u)$ και $f_Y(v)$, αντίστοιχα.

(γ) Είναι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y ανεξάρτητες;

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y > 3X)$

(ε) Για $a > 0$, υπολογίστε την πιθανότητα $P(X + Y \leq a)$

(στ) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (ε), για να βρείτε την pdf της τυχαίας μεταβλητής $Z = X + Y$.