ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2009
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Έκτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 4/12/2009 Ημερομηνία Παράδοσης: 16/12/2009

Άσκηση 1.
(α)

$$F(u) = \begin{cases} 0, \textit{αν}\ u < 0 \\ u^2, \textit{αν}\ 0 \leq u < 1 \\ 1, \textit{αν}\ u \geq 1 \end{cases}$$

είναι έγκυρη ΑΣΚ. $P\{|X| > 0.5\} = 1 - F(0.5) = \frac{3}{4}$.

(β)

$$F(u) = \begin{cases} 0, \textit{αν}\ u < 1 \\ 2u - u^2, \textit{αν}\ 1 \leq u \leq 2 \\ 1, \textit{αν}\ u > 2 \end{cases}$$

δεν είναι έγκυρη ΑΣΚ, αφού $F(1) = 1 > F(2) = 0$.

(γ)

$$F(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} exp(2u), \textit{αν}\ u \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{4} exp(-3u), \textit{αν}\ u > 0 \end{cases}$$

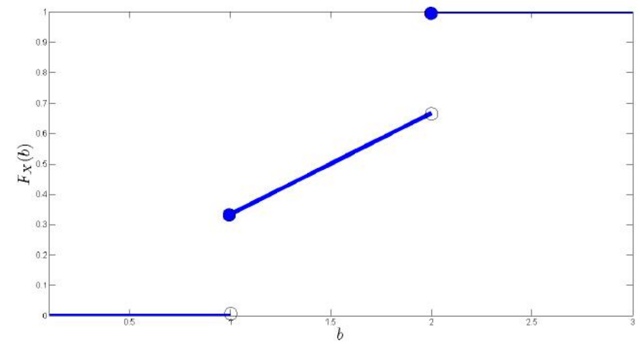
δεν είναι έγκυρη ΑΣΚ αφού δεν είναι συνεχής από δεξιά.

(δ)

$$F(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} exp(2u), \textit{αν}\ u < 0 \\ 1 - \frac{1}{4} exp(-3u), \textit{αν}\ u \geq 0 \end{cases}$$

είναι έγκυρη ΑΣΚ. $P\{|X| > 0.5\} = 1 - P\{|X| \leq 0.5\} = 1 - (F(0.5) - F(-0.5)) = \frac{1}{2} exp(-1) - \frac{1}{4} exp(-1.5)$.

Άσκηση 2.
(α) Βλ. Σχήμα 1



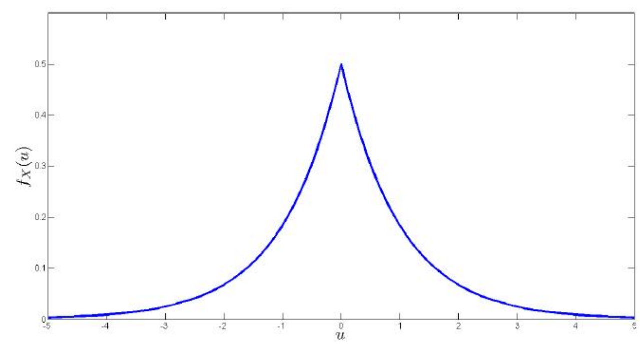
Σχήμα 1: Άσκηση 2(α)

(β) $E[X] = \int f_X(u)du + \sum_u u \cdot P\{X = u\} = \int_1^2 u \cdot \frac{1}{3}du + [1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3}] = \frac{3}{2}$

(γ) $P(|X-1| < 1) = P(0 < X < 2) = F(2^-) - F(0) = \frac{2}{3}$

(δ) $P(|X-1| < 1 | 1 < X \leq 2) = \frac{P(1<X<2)}{1<X\leq 2} = \frac{F(2_-)-F(1)}{F(2_+)-F(1)} = \frac{2/3-1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}$.

Άσκηση 3.
(α) Βλ. Σχημα 2.



Σχήμα 2: Άσκηση 3(α)

(β) $P(|X| < 4) = \int_{-4}^{4} \frac{1}{2}e^{-|u|}du = \int_{-4}^{0} \frac{1}{2}e^{u}du + \int_0^4 \frac{1}{2}e^{-u}du = 1 - e^{-4}$
ή λόγω συμμετρίας, $P(|X| < 4) = 2\int_0^4 \frac{1}{2}e^{-u}du = 1 - e^{-4}$.

(γ) Λύση της $X^2 + X = 0$ είναι $X = -1, 0$. Λύση της $X^2 + X > 0$ είναι $X < -1$ ή $X > 0$.
$P(X^2 + X \geq 0) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2}e^{u}du + \int_0^{\infty} e^{-u}du = \frac{1}{2e} + \frac{1}{2}$

Άσκηση 4.
(α) Αν $u \leq 100$, τότε $F(u) = 0$. Αν $u \geq 100$, τότε
$F(u) = \int_{-\infty}^{u} f(u)du = \int_{100}^{u} \frac{100}{u^2}du = 1 - \frac{100}{u}$.

(β)

$$f(u) = \begin{cases} 1+u, \alpha\nu \ -1 \leq u \leq 0 \\ 1-u, \alpha\nu \ 0 \leq u \leq 1 \end{cases}$$

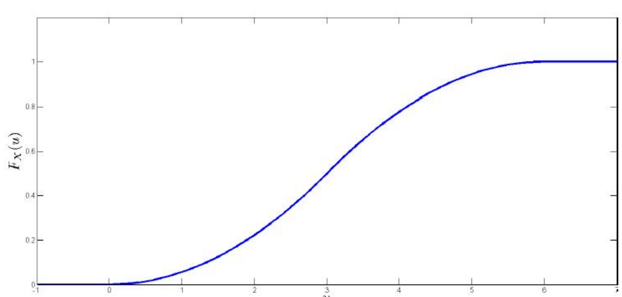
Αν $u \leq -1$, τότε $F(u) = 0$.
Αν $-1 \leq u \leq 0$, τότε $F(u) = \int_{-1}^{u}(1+u)du = \frac{1}{2}u^2 + u + \frac{1}{2}$.
Αν $0 \leq u \leq 1$, τότε $F(u) = \int_{-1}^{0}(1+u)du + \int_{0}^{u}(1-u)du = -\frac{1}{2}u^2 + u + \frac{1}{2}$.
Αν $u \geq 1$, τότε $F(u) = 1$.

(γ)
$F(u) = \int_{-\infty}^{u} f(u)du$
Αν $u \leq -0.1$, τότε $F(u) = 0$.
Αν $-0.1 \leq u \leq 0.1$, τότε $F(u) =$ χώρος $A = 4(u + 0.1)$
Αν $0.1 \leq u \leq 0.5$, τότε $F(u) =$ χώρος Β + χώρος $C = \frac{4}{5} + \frac{1}{2}(u - 0.1)$.
Αν $u \geq 0.5$, τότε $F(u) = 1$.
Συνεπώς,

$$F(u) = \begin{cases} 0, \alpha\nu \ u \leq -0.1 \\ 4(u+0.1), \alpha\nu \ -0.1 \leq u \leq 0.1 \\ \frac{1}{2}u + \frac{3}{4}, \alpha\nu \ 0.1 \leq u \leq 0.5 \\ 1, \alpha\nu \ u \geq 0.5 \end{cases}$$

Άσκηση 5.
(α) Απο τις ιδιότητες της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας έχουμε
$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)du = c\int_0^3 udu + c\int_3^6(6-u)du = 9c$. Επομένως $c = 1/9$.

(β) Έχουμε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή, και $F_X(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)du$.
$a < 0 : F_X(a) = 0$
$0 \leq a < 3 : F_X(a) = \frac{1}{9}\int_0^a udu = \frac{a^2}{18}$
$3 \leq a < 6 : F_X(a) = \frac{1}{9}\int_0^3 udu + \frac{1}{9}\int_3^a(6-u)du = \frac{1}{2} - \frac{1}{18}(6-u)^2|_3^a = 1 - \frac{(6-a)^2}{18}$
$a \geq 6 : F_X(a) = 1$

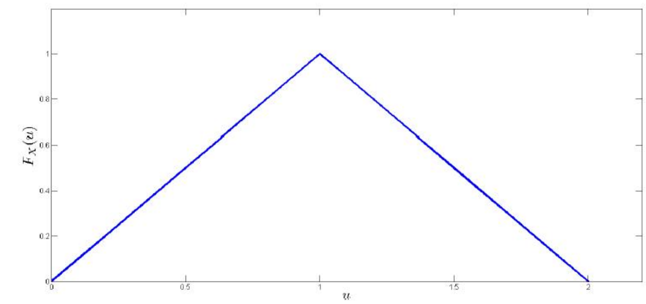


Σχήμα 3: Άσκηση 5(β)

(γ) Έχουμε $P(A) = P(X > 3) = 1 - F_X(3) = 0.5$.
Ομοίως $P(B) = P(1.5 \leq X \leq 9) = P(X \leq 9) - P(X < 1.5) = F_X(9) - F_X(1.5^-) = 1 - 0.125 = 0.875$

(δ) Η τομή των Α και Β είναι το γεγονός $\{3 < X \leq 9\}$ και $P(AB) = P(3 < X \leq 9) = P(X > 3) = 0.5 = P(A) \neq P(A)P(B)$. Επομένως τα δύο γεγονότα δεν είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 6.
(α) Βλ. Σχήμα 4.
Για να είναι έγκυρη η ΑΣΚ $F_X(u)$, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι δύο παρακάτω ιδιότητες:
$f_X(u) \geq 0 \ \forall u \in [0, 2]$.
$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)du =$ χώρος του τριγώνου $= \frac{2\times 1}{2} = 1$



Σχήμα 4: Άσκηση 6(α)

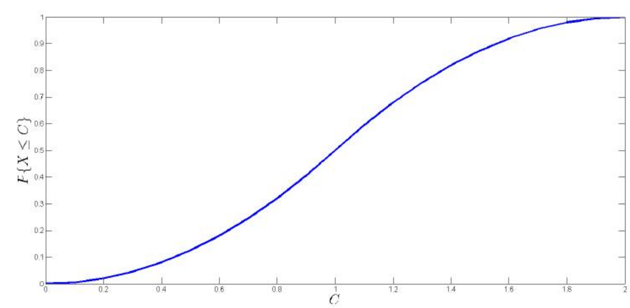
(β) Όχι

(γ) Βλ. Σχήμα 5

$$P\{\iota\kappa\alpha\nu o\pi o\iota\epsilon\acute{\iota}\tau\alpha\iota\ \eta\ \zeta\acute{\eta}\tau\eta\sigma\eta\} = P\{X \leq C\} = \begin{cases} \int_0^C udu, \alpha\nu\ 0 \leq C \leq 1 \\ \int_1^C udu + \int_1^C (2-u)du, \alpha\nu\ 1 \leq C \leq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{C^2}{2}, \alpha\nu\ 0 \leq C \leq 1 \\ 2C - \frac{C^2}{2} - 1, \alpha\nu\ 1 \leq C \leq 2 \end{cases}$$

Αν $C = 1 \Rightarrow P\{\iota\kappa\alpha\nu o\pi o\iota\epsilon\acute{\iota}\tau\alpha\iota\ \eta\ \zeta\acute{\eta}\tau\eta\sigma\eta\} = \frac{1}{2}$



Σχήμα 5: Άσκηση 6(γ)

(δ)

$$\begin{aligned} P\{X > C\} \leq 10^{-1} \Leftrightarrow 1 - P\{X \leq C\} &\leq 10^{-1} \\ P\{X \leq C\} &\geq 0.9 \\ 2C - \frac{C^2}{2} - 1 &\geq 0.9 \\ \Rightarrow C &= 1.5528\ \gamma\alpha\lambda\acute{o}\nu\iota\alpha \end{aligned}$$

(ε) Έστω Z τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το εβδομαδιαίο κέρδος σε ευρώ. Τότε $Z = g(X) =$

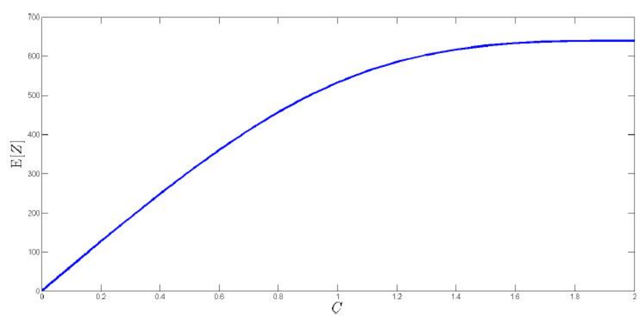
$$= \begin{cases} 640X, \text{αν } X < C \\ 640C, \text{αν } X \geq C \end{cases}$$

Αν $0 \leq C \leq 1$:

$$\begin{aligned} E[Z] &= \int_0 2g(u) f_X(u) du \\ &= \int_0^C u \cdot 640 u du + \int_C^1 640C \cdot u du + \int_1^2 640C \cdot (2-u) du \\ &= 640C - \frac{320}{3} C^3 \end{aligned}$$

Αν $1 \leq C \leq 2$:

$$\begin{aligned} E[Z] &= \int_0 2g(u) f_X(u) du \\ &= \int_0^1 u \cdot 640 u du + \int_1^C 640 u \cdot (2-u) du + \int_2^C 640C \cdot (2-u) du \\ &= \frac{320}{3} C^3 - 640C^2 + 1280C - \frac{640}{3} \end{aligned}$$



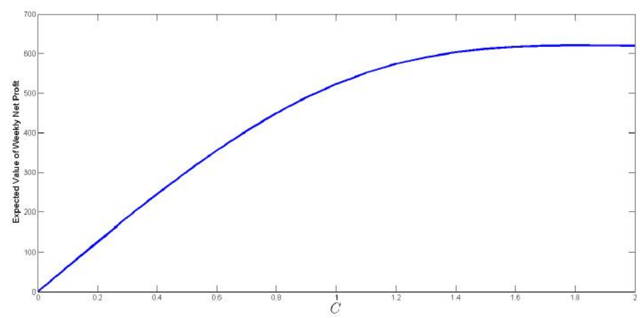
Σχήμα 6: Άσκηση 6(ε)

(στ) Βλ. Σχήμα 7

$$\begin{aligned} K\acute{\epsilon}\rho\delta o\varsigma &= E[Z - 10C] \\ &= E[Z] - 10C \\ &= \begin{cases} 630C - \frac{320}{3} C^3, \text{αν } 0 \leq C \leq 1 \\ -\frac{640}{3} + 1270C - 640C^2 + \frac{320}{3} C^3, \text{αν } 1 \leq C \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Από το γράφημα, είναι ξεκάθαρο ότι η τιμή της C που μεγιστοποιεί το κέρδος είναι μεταξύ του 1 και του 2. Μηδενίζουμε την παράγωγο για να βρούμε την τιμή της C.

$\frac{d}{dC}\{-\frac{640}{3} + 1270C - 640C^2 + \frac{320}{3} C^3\} = 1270 - 1280C + 320C^2 = 0 \Rightarrow C = 1.8232$



Σχήμα 7: Άσκηση 6(στ)