

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2009
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 4/12/2009

Ημερομηνία Παράδοσης: 16/12/2009

Άσκηση 1. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις $F(u)$ είναι έγκυρες αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής (ΑΣΚ); Για εκείνες οι οποίες είναι έγκυρες ΑΣΚ, να υπολογίσετε την πιθανότητα ότι η απόλυτη τιμή της τυχαίας μεταβλητής υπερβαίνει το 0.5.

(α)

$$F(u) = \begin{cases} 0 & u < 0, \\ u^2 & 0 \leq u < 1, \\ 1 & u \geq 1 \end{cases}$$

(β)

$$F(u) = \begin{cases} 0 & u < 1, \\ 2u - u^2 & 1 \leq u \leq 2, \\ 1 & u > 2 \end{cases}$$

(γ)

$$F(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2u} & u \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{4}e^{-3u} & u > 0 \end{cases}$$

(δ)

$$F(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2u} & u < 0, \\ 1 - \frac{1}{4}e^{-3u} & u \geq 0 \end{cases}$$

Άσκηση 2. Έστω η τυχαία μεταβλητή X με αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$F_X(b) = \begin{cases} 0 & b < 1, \\ \frac{1}{3}b & 1 \leq b < 2, \\ 1 & b \geq 2. \end{cases}$$

(α) Σχεδιάστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής και αποφασίστε αν η τ.μ. X είναι διακριτή, συνεχής ή μικτή.

(β) Υπολογίστε την $E[X]$.

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(|X - 1| < 1)$.

(δ) Υπολογίστε την δεσμευμένη πιθανότητα $P(|X - 1| < 1/\{1 < X \leq 2\})$.

Άσκηση 3. Η τ.μ. X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

(α) Σχεδιάστε την $f_X(x)$.

(β) Υπολογίστε την $P(|X| < 4)$.

(γ) Υπολογίστε την $P(X^2 + X > 0)$.

Άσκηση 4. Για κάθε μια από τις επόμενες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας, υπολογίστε την αντίστοιχη ΑΣΚ $F_X(u)$.

(α) $f_X(u) = \frac{100}{u^2}$ για $u \geq 100$.

(β) $f_X(u) = 1 - |u|$ για $|u| < 1$.

(γ) $f_X(u) = \begin{cases} 4 & -0.1 \leq u < 0.1, \\ \frac{1}{2} & 0.1 \leq u \leq 0.5. \end{cases}$

Άσκηση 5. Η ποσότητα ψωμιού (σε εκατοντάδες κιλά) που πουλάει ένας φούρνος σε μία μέρα είναι μια τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(u) = \begin{cases} cu & 0 \leq u < 3, \\ c(6 - u) & 3 \leq u < 6, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Βρείτε την τιμή της σταθεράς c .

(β) Υπολογίστε την τιμή της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής $F_X(u)$ της τυχαίας μεταβλητής X .

(γ) Ποιά είναι η πιθανότητα ο αριθμός των κιλών ψωμιού που πωλούνται στη διάρκεια μιας μέρας να είναι (i) πάνω από 300 κιλά; (ii) μεταξύ 150 και 900 κιλών;

(δ) Αν τα A και B είναι τα γεγονότα των i και ii αντίστοιχα, είναι τα γεγονότα αυτά ανεξάρτητα;

Άσκηση 6. Έστω X τυχαία μεταβλητή, η εβδομαδιαία ζήτηση βενζίνης (σε χιλιάδες γαλόνια) σε ένα βενζινάδικο. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X δίνεται από τον τύπο

$$f_X(u) = \begin{cases} u & 0 \leq u \leq 1, \\ 2 - u & 1 \leq u \leq 2, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Έστω C η χωρητικότητα (σε χιλιάδες γαλόνια) της αποθήκης του βενζινάδικου, η οποία ξαναγεμίζει κάθε εβδομάδα. Ο ιδιοκτήτης του βενζινάδικου ενδιαφέρεται για την τυχαία μεταβλητή Y , δηλαδή της ποσότητας (σε χιλιάδες γαλόνια) βενζίνης η οποία πωλείται σε μία εβδομάδα. Σημειώστε ότι η βενζίνη που πωλείται δεν μπορεί να υπερβεί την χωρητικότητα της αποθήκης, δηλαδή $Y \leq C$. Υποθέστε ακόμη ότι το ακαθάριστο κέρδος για κάθε γαλόνι που πωλείται είναι 0.64 ευρώ.

(α) Σχεδιάστε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(u)$, και δείξτε ότι είναι μία έγκυρη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

(β) Υποθέστε ότι $C = 1$ και παρατηρούμε ότι $X = 1.105$. Μπορεί το βενζινάδικο να ικανοποιήσει την ζήτηση;

(γ) Υπολογίστε και σχεδιάστε την πιθανότητα να ικανοποιείται η ζήτηση, $P(X < C)$, ως συνάρτηση του C . Ποια είναι η πιθανότητα ότι ικανοποιείται η ζήτηση όταν $C = 1$;

(δ) Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή του C που διασφαλίζει ότι η πιθανότητα η ζήτηση να υπερβαίνει την χωρητικότητα δεν είναι μεγαλύτερη από 10^{-1} ;

(ε) Σχεδιάστε την αναμενόμενη τιμή του εβδομαδιαίου ακαθάριστου κέρδους, συναρτήσει της C .

(στ) Υποθέστε ότι ο ιδιοκτήτης πληρώνει $10C$ ευρώ σαν εβδομαδιαίο νοίκι για μια δεξαμενή χωρητικότητας $1000C$ γαλονιών. Σχεδιάστε την αναμενόμενη τιμή του εβδομαδιαίου καθαρού κέρδους συναρτήσει του C . Ποιά τιμή της C μεγιστοποιεί το κέρδος;