

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2009
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 16/11/2009

Ημερομηνία Παράδοσης: 25/11/2009

Άσκηση 1.

Έστω $\mathbf{X}$ μια γεωμετρική τυχαία μεταβλητή. Υπολογίστε τη συνάρτηση $p_X(x|\mathbf{X} \in A) = P\{\mathbf{X} = x|\mathbf{X} \in A\}$, δηλαδή την υπό συνθήκη κατανομή της $\mathbf{X}$ δεδομένου ότι η $\mathbf{X}$ ανήκει στο A , για καθένα από τα ακόλουθα A :

(α) $A = \{\mathbf{X} > k\}$, όπου k είναι ένας θετικός ακέραιος. Δώστε μία ερμηνεία για το αποτέλεσμα.

(β) $A = \{\mathbf{X} < k\}$

(γ) $A = \{\mathbf{X} \text{ είναι άρτιος}\}$

Άσκηση 2.

Ο Αλέξανδρος παίζει χαρτιά και στοιχηματίζει με την Ισμήνη. Κάθε βράδυ ο Αλέξανδρος τραβάει ένα χαρτί από την τράπουλα (με επανάθεση). Εάν το χαρτί που τράβηξε είναι σπαθί ή βασίλισσα, ο Αλέξανδρος κερδίζει 4 ευρώ. Εάν όχι, χάνει 1 ευρώ. Ποια είναι τα συνολικά αναμενόμενα κέρδη (μέση τιμή του κέρδους) του Αλέξανδρου μετά από 30 νύχτες?

Άσκηση 3.

Το πασίγνωστο λειτουργικό σύστημα 'Πόρτες' χρησιμοποιείται από μεγάλο αριθμό χρηστών. Για κάθε υπολογιστή, οι φορές που θα 'κολλήσει' το λειτουργικό σύστημα στη διάρκεια μίας μέρας ακολουθούν την παρακάτω κατανομή:

$$p_X(k) = \frac{4-k}{10}, k = 0, 1, 2, 3.$$

Αν σε μια μέρα ένας υπολογιστής 'κολλήσει' $\mathbf{X} = k$ φορές, ο χρήστης του επανεγκαθιστά το λειτουργικό σύστημα με πιθανότητα $1 - 2^{-k}$.

(α) Βρείτε την μέση τιμή και την διασπορά της $\mathbf{X}$.

(β) Βρείτε την πιθανότητα να γίνει επανεγκατάσταση του λειτουργικού συστήματος σε ένα συγκεκριμένο υπολογιστή.

(γ) Έστω ότι εξετάζουμε μια ομάδα 10 υπολογιστών. Ποιά είναι η πιθανότητα να επανεγκαταστήσουμε το λειτουργικό σε ακριβώς 3 από αυτούς την συγκεκριμένη μέρα?

Άσκηση 4.

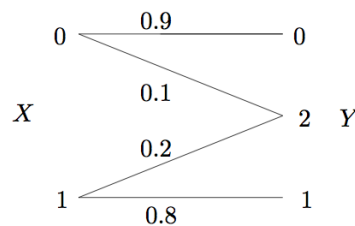
Έστω X και Y δυο τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_{X,Y}(k,j) = c2^{-k}2^{-(j-k)}, k = 0, 1, 2, \dots; j = k, k+1, \dots$$

- (α) Βρείτε τη σταθερά c .
- (β) Βρείτε τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας $p_X(j)$ και $p_Y(j)$.
- (γ) Βρείτε τις υπο συνθήκη συναρτήσεις πιθανότητας $p_{X|Y}(k|j)$ και $p_{Y|X}(j|k)$.
- (δ) Βρείτε την πιθανότητα του γεγονότος $\{Y \geq 2X\}$.

Άσκηση 5.

Το παρακάτω τηλεπικοινωνιακό κανάλι έχει δυαδική είσοδο $X \sim \text{Bern}(\frac{1}{3})$ και τριαδική έξοδο $Y \in \{0, 1, 2\}$.



Η υπό συνθήκη συνάρτηση πιθανότητας $p_{Y|X}(y|x)$ του Y δεδομένου του X δίνεται από το παραπάνω διάγραμμα, π.χ. $p_{Y|X}(2|0) = 0.1$

- (α) Βρείτε τις $p_{X,Y}(x,y)$, $p_Y(y)$ και $p_{X|Y}(x|y)$ για $y = 0, 1, 2$.
- (β) Βρείτε την πιθανότητα λάθους $P_e = P\{X \neq Y\}$
- (γ) Έστω ότι κάνουμε χρήση του ακόλουθου κανόνα αποκωδικοποίησης: Εάν λάβουμε $Y = 0$ ή 2 , τότε αποφασίζουμε ότι εστάλη το $X = 0$, δηλαδή $\hat{X} = 0$. Εάν λάβουμε $Y = 1$, τότε αποφασίζουμε ότι εστάλη το $X = 1$, δηλαδή $\hat{X} = 1$. Ποιά είναι η πιθανότητα να κάνουμε σφάλμα στην αποκωδικοποίηση, δηλαδή $P\{\hat{X} \neq X\}$? Να γίνει σύγκριση με την πιθανότητα σφάλματος χωρίς την χρήση αποκωδικοποιητή, την οποία υπολογίσατε στο (β).

Άσκηση 6.

Ο Ιωάννης πετάει ένα δίκαιο τετράεδρο ζάρι. Αφού δει το αποτέλεσμα X της ρίψης του ζαριού, παίρνει ένα δίκαιο κέρμα και το πετάει X φορές. Έστω Y το πλήθος των κεφαλών από τις ρίψεις του κέρματος.

- (α) Βρείτε την $p_{Y|X}(y|x)$. Δώστε ακόμη το εύρος τιμών της Y .
- (β) Βρείτε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p_{X,Y}(x,y)$ και σχεδιάσετε έναν πίνακα με τις τιμές της συνάρτησης για κάθε πιθανή τιμή της X και της Y .
- (γ) Βρείτε τις $p_Y(y)$ και $p_{X|Y}(x|y)$.