

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2009
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 2/11/2009

Ημερομηνία Παράδοσης: 12/11/2009

Άσκηση 1.

(α) Η τυχαία μεταβλητή W παίρνει τις τιμές $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Η σ.π.π. είναι:

$$p_W(w) = P\{W = w\} = P\{w : \sum_{i=0}^7 w_i = w\} = \binom{8}{w} \frac{1}{2^8}$$

εφόσον υπάρχουν $\binom{8}{w}$ 8-διάστατα δυαδικά διανύσματα που έχουν w 1 για $w \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Παρατηρήστε ότι:

$$\sum_{w=0}^8 p_W(w) = \sum_{w=0}^8 \binom{8}{w} \frac{1}{2^8} = \frac{1}{2^8} \sum_{w=0}^8 \binom{8}{w} = \frac{1}{2^8} (1+1)^8 = 1$$

όπως αναμένεται αφού η p_W είναι σ.π.π..

(β) Έχουμε ότι:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{όταν το πλήθος των 1 στο } w \text{ είναι άρτιος} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έτσι:

$$\begin{aligned} p_X(1) &= P(X=1) \\ &= P\{w : \sum_{i=0}^7 w_i = 2k = \text{'άρτιος'}\} \\ &= P\{w : \sum_{i=0}^7 w_i = 0\} + P\{w : \sum_{i=0}^7 w_i = 2\} + P\{w : \sum_{i=0}^7 w_i = 4\} + \\ &\quad P\{w : \sum_{i=0}^7 w_i = 6\} + P\{w : \sum_{i=0}^7 w_i = 8\} \\ &= p_W(0) + p_W(2) + p_W(4) + p_W(6) + p_W(8) \\ &= \frac{1}{2^8} \left(\binom{8}{0} + \binom{8}{2} + \binom{8}{4} + \binom{8}{6} + \binom{8}{8} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Εφόσον $p_X(0) = 1 - p_X(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, δηλαδή:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/2, & x = 1 \\ 1/2, & x = 0 \end{cases}$$

(γ) Έχουμε:

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{αν } w_j = 1 \\ 0, & \text{αν } w_j = 0 \end{cases}$$

άρα:

$$p_Y(1) = P\{Y=1\} = P\{w : w_j = 1\}.$$

Η παραπάνω πιθανότητα αναφέρεται στο γεγονός ότι οι υπόλοιπες επτά συνιστώσες $w_i, i \neq j$ μπορούν να παρουν οποιαδήποτε από τις τιμές 0 ή 1. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{Πλήθος αποτελεσμάτων έτσι ώστε } \{w_j = 1 \text{ και } w_i = 0 \text{ ή } 1, i \neq j\} &= \binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \dots + \binom{7}{7} \\ &= \sum_{n=0}^7 \binom{7}{n} = (1+1)^7 = 2^7 \end{aligned}$$

εφόσον μπορούν να υπάρχουν είτε 0, είτε 1, είτε 2, ... είτε 7 w_i συνιστώσες που μπορούν να πάρουν την τιμή 1. Κάθε ένα από αυτά τα 2^7 αποτελέσματα έχει πιθανότητα $1/2^8$, έτσι:

$$p_Y(1) = P\{Y = 1\} = P\{w : w_j = 1\} = \frac{2^7}{2^8} = \frac{1}{2}.$$

Πρέπει να ισχύει $p_Y(0) + p_Y(1) = 1$, άρα $p_Y(1) = \frac{1}{2}$ και:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 1/2, & \text{αν } y = 1 \\ 1/2, & \text{αν } y = 0 \end{cases}$$

(δ) Έχουμε:

$$Z = \begin{cases} 1, & \text{αν } \max_i(w_i) = 1 \\ 0, & \text{αν } \max_i(w_i) = 0 \end{cases}$$

άρα

$$p_Z(0) = P\{Z = 0\} = P\{w : \max_i(w_i) = 0\} = P\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\} = \frac{1}{2^8}.$$

Πρέπει να ισχύει $p_Z(0) + p_Z(1) = 1$, άρα $p_Z(1) = \frac{255}{256}$, και

$$p_Z(z) = \begin{cases} 255/256, & \text{αν } z = 1 \\ 1/256, & \text{αν } z = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 2.

Η τυχαία μεταβλητή X παίρνει τιμές $X = 6, 7, 8$ επομένως μια τυχαία μεταβλητή Y που θα συμβολίζει το πλήθος των ατόμων που δεν προλαβαίνουν να βρουν θέση για το ταξίδι, θα παίρνει τιμές $Y = 1, 2, 3$ αντίστοιχα για κάθε πιθανή τιμή του X . Εφόσον το X παίρνει τις τιμές $X = 6, 7, 8$ με τις αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{28}{256}, \frac{8}{256}, \frac{1}{256}$, τότε μπορούμε να βρούμε ότι

$$E[Y] = \frac{1 \times 28 + 2 \times 8 + 3 \times 1}{256} = \frac{47}{256}$$

Άσκηση 3.

(α),(β) Γενικά:

$$P_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Έτσι για $p = 0.1$ έχω :

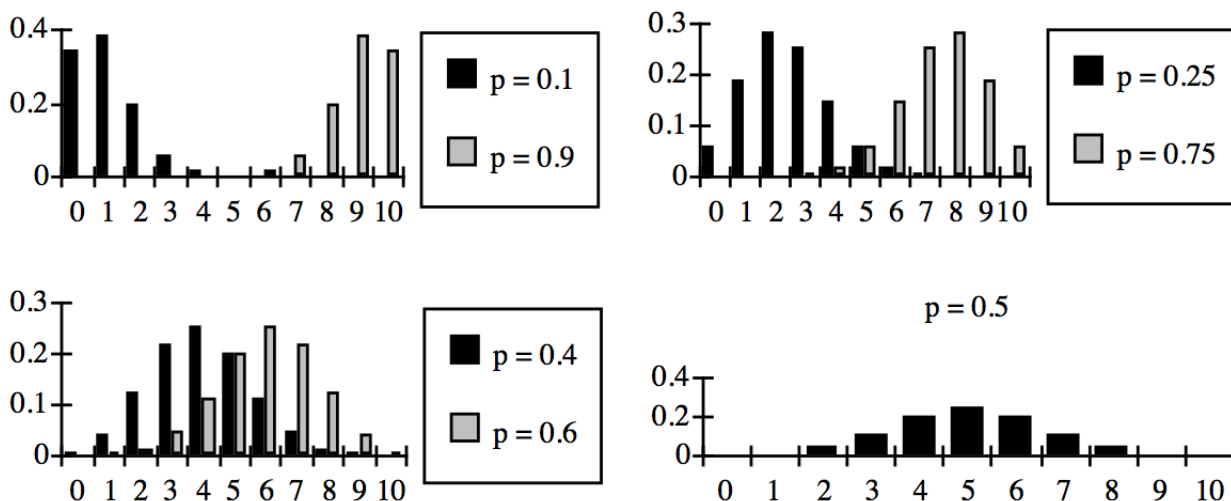
$$P_X(k=0) = \binom{10}{0} 0.1^0 (1-0.1)^{10-0} = 0.348$$

$$P_X(k=1) = \binom{10}{1} 0.1^1 (1-0.1)^{10-1} = 0.3$$

$$P_X(k=2) = \binom{10}{2} 0.1^2 (1-0.1)^{10-2} = 0.19$$

και συνεχίζουμε τους υπολογισμούς για τις τιμές του $k = 0, 1, \dots, 9, 10$. Έπειτα κάνουμε τις αντίστοιχες πράξεις για κάθε διαφορετική τιμή του p .

Οι κατανομές φαίνονται στο παρακάτω γράφημα.



(γ)

Απο το γράφημα διακρίνουμε ότι η σχέση ανάμεσα στις κατανομές (ΣΠ) είναι: Για μια τιμή p θα έχω πιθανότητα $P\{X = k\}$ ενώ για την τιμή $1-p$ θα έχω πιθανότητα $P\{X = 10 - k\}$.

(δ)

Απο τους υπολογισμούς (αλλά και απο την κατανομή) προκύπτει ότι για $p = 0.1, 0.25, 0.4, 0.5, 0.6, 0.75$ και 0.9 , η πιθανότητα $P\{X = k\}$ παίρνει την μέγιστη τιμή για $k = 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9$ αντίστοιχα.

(ε)

Η μέση τιμή είναι np ενώ το *mode* είναι $(n+1)p$.

$$\|np - (n+1)p\| = \|p(n - n - 1)\| = \|p\| \leq 1$$

Άσκηση 4.

(α) Η πιθανότητα να σερβίρει το ίδιο λαχανικό και τις τρεις μέρες είναι:

$$(0.2)^3 + (0.5)^3 + (0.3)^3 = 0.16$$

(β) Η πιθανότητα να σερβίρει το ίδιο λαχανικό τις δυο απο τις τρεις μέρες είναι:

$$3[(0.2)^2(1-0.2) + (0.3)^2(1-0.3) + (0.5)^2(1-0.5)] = 0.66$$

(γ) Η πιθανότητα να σερβίρει διαφορετικό λαχανικό καθε μια απο τις τρεις μέρες είναι:

$$3![(0.2) \times (0.5) \times (0.3)] = 0.18$$

Άσκηση 5.

(α) Οι διαφορετικές τιμές που μπορεί να πάρει η $\mathbf{X}$ είναι $:-6, 6, 12, 18$

(β)

Αν στοιχηματίσουμε 6 ευρώ στον αριθμό i τότε χάνουμε όλα τα λεφτά αν και στις τρεις ζαριές εμφανιστούν αριθμοί διαφορετικοί του i . Έτσι

$$P\{\mathbf{X} = -6\} = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$$

Εαν κερδίσουμε 6 ευρώ τότε ακριβώς μια απο τις τρεις ζαριές εμφάνισε τον αριθμό i που ποντάραμε. Έτσι

$$P\{\mathbf{X} = 6\} = \frac{3 \times (1 \times 5^2)}{6^3} = \frac{75}{216}$$

Όμοια υπολογίζουμε για 12 ευρώ

$$P\{\mathbf{X} = 12\} = \frac{3 \times (1^2 \times 5)}{6^3} = \frac{15}{216}$$

και

$$P\{\mathbf{X} = 18\} = \frac{1^3}{6^3} = \frac{1}{216}$$

(γ)

$$E[\mathbf{X}] = \sum u \times p(u) = \frac{125 \times -6 + 75 \times 6 + 15 \times 12 + 1 \times 18}{216} = \frac{102}{216} = -\frac{17}{36} \dots$$

Η πιθανότητα να κερδίσει ο παίκτης κάποιο ποσόν είναι:

$$1 - P(\mathbf{X} = -6) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} = 0.421$$

(δ)

Για την νέα στρατηγική θα έχουμε:

Η πιθανότητα να έρθουν τρεις διαφορετικοί αριθμοί είναι $\frac{6 \times 5 \times 4}{216} = \frac{5}{9}$. Σε αυτή τη περίπτωση παίρνουμε πίσω 6 ευρώ, οσα δηλαδή ποντάραμε, επομένως έχουμε κέρδος 0.

Η πιθανότητα να φέρουν και τα τρία ζάρια τον ίδιο αριθμό είναι $6 \times \frac{1}{216} = \frac{1}{36}$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε κέρδος 3 ευρώ αλλά χάνουμε τα πέντε ευρώ που ποντάραμε σε όλους τους υπόλοιπους αριθμούς, επομένως έχουμε 'κέρδος' -2.

Η πιθανότητα να έρθει ο ίδιος αριθμός σε ακριβώς δυο ζάρια είναι $3 \times \frac{(1^2 \times 5)}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$. Σε αυτή την περίπτωση κερδίζουμε 2 ευρώ απο τα δυο όμοια και 1 ευρώ απο το άλλο. Όμως χάνουμε 4 ευρώ απο τα στοιχήματα στους αριθμούς που δεν εμφανίστηκαν. Επομένως έχουμε 'κέρδος' -1.

Τελικά η $\mathbf{Y}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή που παίρνει τιμές $\{0, -2, -1\}$ με πιθανότητα $\{\frac{5}{9}, \frac{1}{36}, \frac{5}{12}\}$ αντίστοιχα.

Η μέση τιμή της είναι:

$$E[\mathbf{Y}] = \frac{0 \times 20 - 1 \times 15 - 2 \times 1}{36} = -\frac{17}{36}$$

Η πιθανότητα να κερδίσει ο παίκτης κάποιο ποσόν είναι:

$$1 - [P(\mathbf{Y} = 0) + P(\mathbf{Y} = -1) + P(\mathbf{Y} = -2)] = 1 - 1 = 0$$

Άσκηση 6.**(α)**

$$\begin{aligned}
P\{\mathbf{X} \leq 100\} &= 1 - P\{\mathbf{X} > 100\} \\
&= 1 - [P\{\mathbf{X} = 105\} + P\{\mathbf{X} = 104\} + P\{\mathbf{X} = 103\} + P\{\mathbf{X} = 102\} + P\{\mathbf{X} = 101\}] \\
&= 1 - [(0.9)^{105} + \binom{105}{1}(0.9)^{104}(0.1) + \binom{105}{2}(0.9)^{103}(0.1)^2 + \binom{105}{3}(0.9)^{102}(0.1)^3 + \binom{105}{4}(0.9)^{101}(0.1)^4] \\
&= 0.9832...
\end{aligned}$$

(β) Εάν $\mathbf{X}$ είναι μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους (n, p) , τότε $\mathbf{Y} = n - \mathbf{X}$ είναι επίσης μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους $(n, 1 - p)$. Έτσι και ο αριθμός των μη-εμφανίσεων αποτελεί μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους $(105, 0.1)$. Εφόσον έχουμε πολύ μεγάλη τιμή n και πολύ μικρή p , είναι λογική η προσεγγίση με *Poisson* τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda = np = 10.5$.

(γ)

$$\begin{aligned}
P\{\mathbf{Y} \geq 5\} &= 1 - P\{\mathbf{Y} < 5\} = 1 - [P\{\mathbf{Y} = 0\} + P\{\mathbf{Y} = 1\} + P\{\mathbf{Y} = 2\} + P\{\mathbf{Y} = 3\} + P\{\mathbf{Y} = 4\}] \\
&= 1 - e^{-10.5} \left[1 + (10.5) + \frac{(10.5)^2}{2!} + \frac{(10.5)^3}{3!} + \frac{(10.5)^4}{4!} \right] = 0.978906...
\end{aligned}$$