ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2009
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 2/11/2009 Ημερομηνία Παράδοσης: 12/11/2009

Θέματα: Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές (Ι).

Άσκηση 1.
Ο δειγματοχώρος Ω ενός πειράματος αποτελείται από όλα τα δυαδικά διανύσματα διάστασης 8, δηλαδή, κάθε δειγματοσημείο του Ω έχει τη μορφή $\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_7)$, όπου το ω_i είναι 0 ή 1. Ο ομοιόμορφος πιθανοτικός νόμος εκχωρεί πιθανότητα $1/2^8$ σε καθένα από τα 2^8 στοιχεία του Ω. Υπολογίστε τις συναρτήσεις πιθανότητας των παρακάτω τυχαίων μεταβλητών (τ.μ.) ορισμένων στο Ω:

(α) $W(\omega) = \sum_{i=0}^{7} \omega_i$, δηλαδή, το πλήθος των 1 στο δυαδικό διάνυσμα.
(β) $X(\omega) = 1$ όταν το πλήθος των 1 στο ω είναι άρτιος αριθμός, και 0 αλλιώς.
(γ) $Y(\omega) = \omega_4$, δηλαδή, η τιμή της τέταρτης συνιστώσας του ω.
(δ) $Z(\omega) = \max_i(\omega_i)$.

Άσκηση 2.
Οκτώ άτομα κάνουν κράτηση για να ταξιδέψουν με μία λιμουζίνα πέντε θέσεων απο την Καλαμάτα προς την Φοινικούντα. Το πλήθος των ανθρώπων που τελικά εμφανίζονται για το ταξίδι μπορεί να μοντελοποιηθεί με μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή $\mathbf{X}$ με παραμέτρους $(8, \frac{1}{2})$. Εαν εμφανισθούν πάνω απο 5 άτομα, μόνο οι πρώτοι 5 θα μπορέσουν να ταξιδέψουν τελικά. Οι υπόλοιποι θα παραμείνουν στην Καλαμάτα. Ποιός είναι ο μέσος αριθμός ατόμων που δεν προλαβαίνουν να βρούν θέση για το ταξίδι;

Άσκηση 3.
(Μπορείτε να κάνετε χρήση κάποιου προγράμματος, όπως *speedsheet*, *Mathematica*, *MATLAB*, για τον υπολογισμό των παρακάτω ερωτημάτων.)
Έστω A ένα γεγονός που συμβαίνει με πιθανότητα p.

(α) Για κάθε τιμή του $p = 0.1$, 0.25 , 0.4 , 0.5 , 0.6 , 0.75 και 0.9 βρείτε την πιθανότητα να συμβεί το A $k = 0$, 1 , 2 ,..., 10 φορές σε συνολικά 10 ανεξάρτητες δοκιμές του πειράματος.

(β) Στο προηγούμενο υποερώτημα ουσιαστικά υπολογίσατε την συνάρτηση πιθανότητας (ΣΠ) μιας διωνυμικής τυχαίας μεταβλητής $\mathbf{X}$ με παραμέτρους $(10, p)$ για εφτά διαφορετικές τιμές του p. Για κάθε τιμή του p σχεδιάστε τώρα τη αντίστοιχη κατανομή (ΣΠ).

(γ) Ποιά σχέση διακρίνετε ανάμεσα στις κατανομές (ΣΠ) για p=0.1 και p=0.9 ; Όταν p=0.25 και p=0.75 ; Όταν p=0.4 και p=0.6 ;

(δ) Απο το γράφημα της κάθε κατανομής που σχεδιάσατε στο υποερώτημα (β), βρείτε για ποιά τιμή του k η πιθανότητα $P(\mathbf{X} = k)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

(ε) Αποδείξτε ότι για μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους (n, p) η τιμή που εμφανίζεται τις περισσότερες φορές (δηλαδή η τιμή για την οποία μεγιστοποιείται η ΣΠ, το λεγόμενο *mode* της κατανομής) διαφέρει απο τη μέση τιμή το πολύ 1.

Άσκηση 4.
Έστω A, B και C τα γεγονότα να σερβίρει η λέσχη της σχολής σπαράγγια, μπρόκολα και καλαμπόκι, αντίστοιχα. Απο την εμπειρία σας γνωρίζετε ότι σερβίρει μόνο ένα λαχανικό την κάθε μέρα και οι πιθανότητες εμφάνισης των παραπάνω είναι: $P(A) = 0.2, P(B) = 0.5, P(C) = 0.3$. Θεωρούμε την κάθε ημέρα ως ανεξάρτητη δοκιμή, με άλλα λόγια οι μάγειρες παίρνουν ανεξάρτητες αποφάσεις για το τι λαχανικό θα σερβίρουν την εκάστοτε ημέρα. Σε μία περίοδο τριών ημερών ποια είναι η πιθανότητα:

(α) Να σερβίρει το ίδιο λαχανικό και τις τρεις μέρες;
(β) Να σερβίρει το ίδιο λαχανικό τις δύο απο τις τρεις μέρες;
(γ) Να σερβίρει διαφορετικό λαχανικό κάθε μια από τις τρείς μέρες;

Άσκηση 5.
Έστω ενα παιχνίδι στοιχήματος με ζάρια το οποίο παίζεται ως εξής: ένας παίχτης στοιχηματίζει λεφτά σε έναν απο τους αριθμούς 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6. Ρίχνουμε τρία δίκαια ζάρια (επομένως ο δειγματοχώρος έχει μέγεθος 6^3) και ανάλογα με το πόσες φορές ήρθε ο αριθμός που στοιχηματίσαμε μία, δυο ή τρείς κερδίζουμε μία, δυο ή τρεις φορές τα λεφτά που στοιχηματίσαμε. Το αρχικό ποσό χρημάτων που ποντάραμε στο στοίχημα προφανώς μας επιστρέφεται αν κερδίσουμε και δεν υπολογίζεται σαν κέρδος. Εαν χάσουμε, δηλαδή δεν έρθει καμία φορά ο αριθμός που επιλέξαμε, τότε χάνουμε όλα τα λέφτα που στοιχηματίσαμε. Έστω $\mathbf{X}$ μία τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το ποσό των χρημάτων που κερδίζουμε από ένα στοίχημα 6 ευρώ.

(α) Ποιές διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει η τυχαία μεταβλητή $\mathbf{X}$; Δηλαδή υπολογίστε το πεδίο τμών της $\mathbf{X}$. Θεωρείστε ότι αρνητικές τιμές εκφράζουν το ποσό των χρημάτων που χάνουμε.
(β) Ποιά είναι η συνάρτηση πιθανότητας (ΣΠ) της τυχαίας μεταβλητής $\mathbf{X}$;
(γ) Ποιά είναι η μέση τιμή της $\mathbf{X}$; Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει ο παίκτης κάποιο ποσό;
(δ) Ένας παίχτης "σπάει" το στοίχημα των 6 ευρώ και ποντάρει 1 ευρώ σε κάθε ένα από τους έξι αριθμούς. Το σκεπτικό πίσω από αυτή την στρατηγική είναι ότι τουλάχιστον ένας και το πολύ τρείς από τους αριθμούς που πόνταρε θα αποδόσουν λεφτά. Έστω $\mathbf{\Upsilon}$ η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τα κέρδη του παίχτη σύμφωνα με τη δεύτερη στρατηγική. Ποιες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει η τυχαία μεταβλητή $\mathbf{\Upsilon}$; Ποια είναι η μέση τιμή της $\mathbf{\Upsilon}$; Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει ο παίκτης κάποιο ποσό; Συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με τις αντίστοιχες τις προηγούμενης στρατηγικής και αποφασίστε ποια είναι η καλύτερη στρατηγική.

Άσκηση 6.
Έστω οτι 105 άτομα κάνουν κράτηση για μια πτήση 100 θέσεων απο την Αθήνα στη Θεσσαλονίκη. Ο αριθμός των επιβατών που εμφανίζονται τελικά για την πτήση μπορεί να μοντελοποιηθεί με μία διωνυμική τυχαία μεταβλητή $\mathbf{X}$ με παραμέτρους (105,0.9).

(α) Βρείτε την πιθανότητα όλοι οι επιβάτες που θα εμφανιστούν να βρούν θέση ($P(\mathbf{X} \leq 100)$).
(β) Εξηγήστε γιατί ο αριθμός των επιβατών που δεν εμφανίζονται μπορεί να μοντελοποιηθεί με μια *Poisson* τυχαία μεταβλητή $\mathbf{\Upsilon}$ και υπολογίστε την τιμή της παραμέτρου λ.
(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα όλοι οι επιβάτες που θα εμφανιστούν να βρούν θέση αλλά αυτή την φορά με βάση το *Poisson* μοντέλο. Δηλαδή υπολογίστε την πιθανότητα $P(\mathbf{\Upsilon} \geq 5)$ και συγκρίνετε την τιμή αυτή με την απάντηση που υπολογίσατε στο υποερώτημα (α).