ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

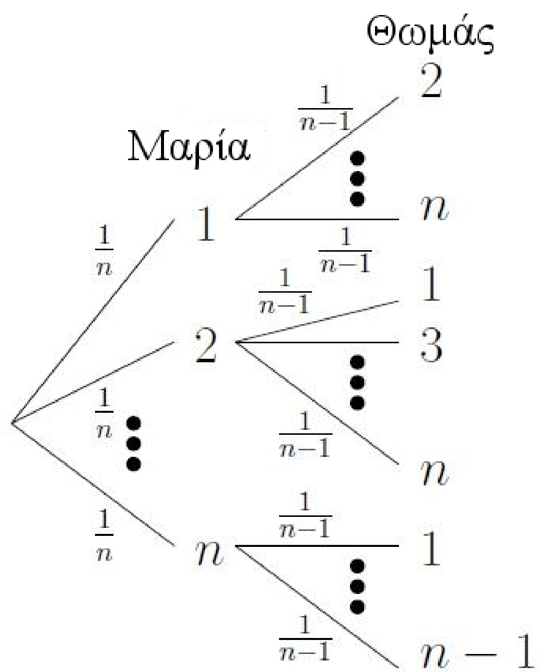
ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2009
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/10/2009 Ημερομηνία Παράδοσης: 29/10/2009

Θέματα: Ανεξαρτησία, Συνδυαστική Ανάλυση.

Άσκηση 1.
Για ευκολία θα αριθμήσουμε κάθε θέση στάθμευσης. Θα σχεδιάσουμε ένα δέντρο πιθανοτήτων για να περιγράψουμε το δειγματοχώρο.



Σχήμα 1: Δέντρο πιθανοτήτων

Η Μαρία μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε θέση από τις n θέσεις στάθμευσης. Η πιθανότητα να διαλέξει κάποια θέση είναι $1/n$. Ο Θωμάς μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε από τις $n-1$ θέσεις που έχουν απομείνει με πιθανότητα $1/(n-1)$. Υπάρχουν $n(n-1)$ φύλλα στο δέντρο μας, και κάθε φύλλο είναι ισοπίθανο. Όταν κοιτάμε τα φύλλα των κλαδιών όπου η Μαρία δεν διάλεξε τις θέσεις 1, 2, $n-1$ ή n παρατηρούμε ότι 4 φύλλα σε κάθε πλευρά αυτών των κλαδιών είναι στο δειγματοχώρο μας (2 θέσεις στάθμευσης σε κάθε πλευρά της θέσης της Μαρίας). Όταν η Μαρία επιλέγει τη θέση 2 ή $n-1$, υπάρχουν 3 τέτοια φύλλα (μία θέση από τη μία πλευρά και 2 από την άλλη). Όταν επιλέγει την 1 ή n υπάρχουν 2 τέτοια φύλλα (είναι στο τέλος του χώρου στάθμευσης - από τη μία ή την άλλη πλευρά).

Επομένως η πιθανότητα να έχουν σταθμεύσει σε απόσταση τουλάχιστον μιας θέσης μεταξύ τους είναι:

$$\frac{(4)(n-4)+(3)(2)+(2)(2)}{n(n-1)} = \frac{4n-6}{n(n-1)}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε καταμέτρηση υπάρχουν $n(n-1)$ επιλογές για ένα ζεύγος θέσεων, από τις οποίες υπάρχουν $2(n-1)$ επιλογές με καμία άδεια θέση μεταξύ τους και $2(n-2)$ επιλογές με 1 θέση μεταξύ τους.
Η πιθανότητα να έχουν σταθμεύσει σε απόσταση παραπάνω από μιας θέσης μεταξύ τους είναι:

$$\frac{2(n-1)+2(n-2)}{n(n-1)} = \frac{4n-6}{n(n-1)}$$

Άσκηση 2.
(α) Το πλήθος των πιθανών χεριών που μπορεί να πάρει ο πρώτος παίχτης είναι $\binom{52}{13}$. Μονάχα ένα από αυτά τα χέρια αποτελείται από 13 σπαθιά, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{1}{\binom{52}{13}}$

(β) Έχουμε 4 γεγονότα: Ο 1ος παίχτης μπορεί να πάρει τα 13 σπαθιά, ο 2ος να πάρει τα 13 σπαθιά, ο 3ος ή ο 4ος επίσης. Μπορούμε να προσθέσουμε τις πιθανότητες του καθενός και να έχουμε την απάντησή μας. Κάθε γεγονός έχει πιθανότητα $\frac{1}{\binom{52}{13}}$, συνεπώς η απάντησή μας είναι $\frac{4}{\binom{52}{13}}$.

(γ) Θεωρήστε τα 2 παρακάτω γεγονότα:
i. Α = Ο 1ος παίχτης παίρνει τα 13 σπαθιά.
ii. Β = Ο 2ος παίχτης παίρνει το ρήγα κούπα.
Τα γεγονότα Α και Β δεν είναι ανεξάρτητα. Αν γνωρίζουμε το Β, γνωρίζουμε ότι ο 1ος παίχτης έχει το ρήγα κούπα, επομένως γνωρίζουμε ότι ο 1ος παίχτης δεν μπορεί να έχει και τα 13 σπαθιά. Με άλλα λόγια $P(A|B) = 0$ το οποίο δεν είναι ισοδύναμο με το $P(A) = \frac{1}{\binom{52}{13}}$. Τα γεγονότα Α και Β είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα. Γενικά, όταν δύο γεγονότα μη μηδενικής πιθανότητας είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα δεν μπορούν να είναι ανεξάρτητα.

(δ) Θεωρήστε τα 2 παρακάτω γεγονότα:
i. Α = Όλα τα χαρτιά του 1ου παίχτη ανήκουν στην ίδια σειρά.
ii. Β = Ο 1ος παίχτης παίρνει το ρήγα κούπα.
Μπορούμε να δείξουμε ότι τα δύο γεγονότα είναι ανεξάρτητα αν $P(B|A) = P(B)$. Αφού ο 1ος παίχτης έχει όλα τα φύλλα της ίδιας σειράς η πιθανότητα Π(Β ͺ Α) = 1/4, γνωρίζοντας ότι αυτή η σειρά μπορεί να είναι είτε κούπες είτε μπαστούνια είτε σπαθιά είτε καρρό. Κάθε σειρά είναι ισοπίθανη με πιθανότητα 1/4, και ο 1ος παίχτης θα λάβει το ρήγα κούπα με πιθανότητα 1/4. Η πιθανότητα $P(B) =$ 1/4 αφού κάθε παίχτης μπορεί να πάρει τον ρήγα κούπα με ίση πιθανότητα, επομένως η πιθανότητα ο 1ος παίχτης να πάρει το ρήγα κούπα είναι 1/4. Επομένως $P(B|A) = P(B)$ συμπεραίνοντας ότι τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα. Αυτά τα γεγονότα δεν είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα αφού η τομή τους δεν είναι κενή - είναι το γεγονός ότι ο 1ος παίχτης παίρνει τις κούπες.

Άσκηση 3.
Υπάρχουν $n!$ τρόποι να μοιράσουμε n καπέλα σε n διαφορετικούς ανθρώπους. Αφού $n-2$ άνθρωποι πήραν τα δικά τους καπέλα, υπάρχουν 2 καπέλα που έχουν δωθεί σε λάθος ανθρώπους. Ο αριθμός των τρόπων για δύο ανθρώπους να μην έχουν πάρει το σωστό καπέλο είναι $\binom{n}{2}$. Επομένως η πιθανότητα είναι $\frac{\binom{n}{2}}{n!}$.

Άσκηση 4.
Αφού τα 4 φύλλα ορίζονται από την Κατερίνα, ο Νίκος μπορεί να επιλέξει 4 φύλλα από τα 48 που έχουν απομείνει στην τράπουλα. Ο συνολικός αριθμός των φορών των χαρτιών που παίρνει ο Νίκος και περιλαμβάνει τα χαρτιά της Κατερίνας είναι $\binom{4}{4}\binom{48}{4}$. Ο συνολικός αριθμός όπου ο Νίκος μπορεί να επιλέξει οποιεσδήποτε 8 κάρτες είναι $\binom{52}{8}$. Έτσι η πιθανότητα είναι $\frac{\binom{4}{4}\binom{48}{4}}{\binom{52}{8}}$.

Άσκηση 5.

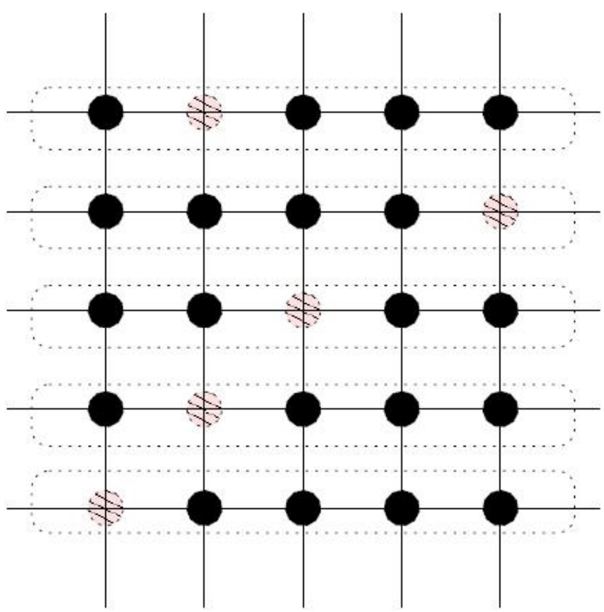
(α) Δεδομένου ότι έχει έρθει Κεφαλή ακριβώς μία φορά, υποθέτουμε ότι μπορεί να ήρθε σε οποιαδήποτε ρίψη. Επομένως η πιθανότητα η πρώτη ρίψη να έφερε Κεφαλή είναι $\frac{1}{n}$.

(β) Δεδομένου ότι έχει έρθει Κεφαλή ακριβώς 2 φορές, εάν η πρώτη ρίψη είχε φέρει Κεφαλή, υπάρχουν $n-1$ θέσεις (ρίψεις) όπου μπορεί να ήρθε Κεφαλή. Ο συνολικός αριθμός φορών ώστε να έχουμε 2 Κεφαλές είναι $\binom{n}{2}$. Επομένως η πιθανότητα είναι $\frac{n-1}{\binom{n}{2}}$.

(γ) Δεδομένου ότι έχει έρθει Κεφαλή ακριβώς 7 φορές, η πιθανότητα 3 από τις 4 πρώτες ρίψεις να έχουν φέρει Κεφαλή μπορεί να διαχωριστεί σε 3 μέρη:
i. Ο αριθμός των φορών που μπορεί να έχουμε 3 Κεφαλές στις 4 πρώτες ρίψεις είναι $\binom{4}{3}$
ii. Ο αριθμός των φορών ώστε να έχουμε 4 Κεφαλές στις $n-4$ ρίψεις που απέμειναν είναι $\binom{(n-4)}{4}$
iii. Ο αριθμός των φορών ώστε να έχουμε 7 Κεφαλές σε n ρίψεις είναι $\binom{n}{7}$
Επομένως η πιθανότητα είναι $\frac{\binom{4}{3}\binom{(n-4)}{4}}{\binom{n}{7}}$.

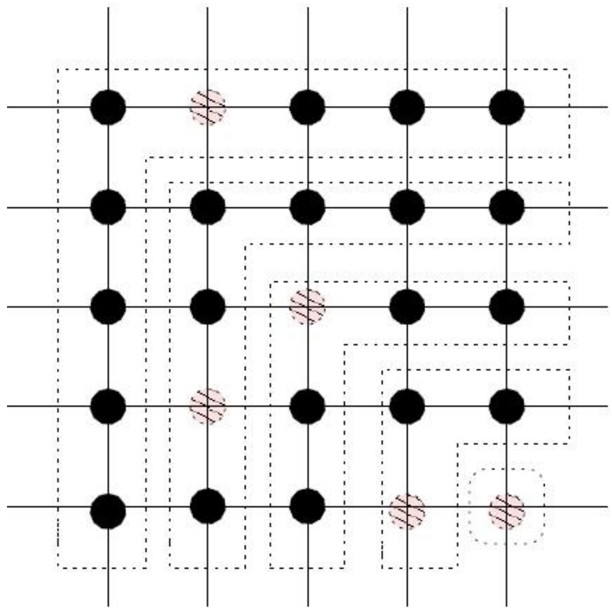
Άσκηση 6.

(α) Υπάρχουν συνολικά $(25)(24)(23)(22)(21) = \frac{25!}{20!}$ τρόποι να επιλέξουμε 5 πέτρες από 25 πέτρες, αφού υπάρχουν 25 τρόποι να επιλέξουμε την 1η πέτρα, 24 τρόποι να επιλέξουμε την 2η πέτρα κ.ο.κ. Εάν θέλουμε να επιλέξουμε 5 πέτρες ώστε να είναι σε διαφορετική σειρά, ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να το κάνουμε είναι 25 χρησιμοποιώντας αρχή κατεμέτρησης. Αφού η 2η πέτρα δεν μπορεί να βρίσκεται στην ίδια σειρά, ο αριθμός των τρόπων επιλογής της είναι 25-5 = 20. Με την ίδια λογική ο αριθμός των τρόπων για να επιλέξουμε την 3η πέτρα είναι 20-5 = 15, επειδή δεν μπορεί να βρίσκεται στις προηγούμενες δύο σειρές. Για να επιλέξουμε την 4η πέτρα έχουμε 10 τρόπους, και για την 5η έχουμε 5 τρόπους. Επομένως η πιθανότητα να επιλέξουμε 5 πέτρες και να βρίσκονται σε διαφορετική σειρά η καθεμία είναι $\frac{(25)(20)(15)(10)(5)}{\frac{25!}{20!}}$.



Σχήμα 2: Βρίσκονται σε διαφορετική σειρά

(β) Κοιτώντας τον 5×5 πίνακα που σχηματίζεται από τις πέτρες παρατηρούμε ότι υπάρχουν 5 θέσεις ώστε να βάλουμε την 1η πέτρα στην 1η γραμμή. Μόλις τοποθετήσουμε την 1η πέτρα υπάρχουν 4 θέσεις για να βάλουμε την 2η πέτρα στην 2η γραμμή, αφού η στήλη που χρησιμοποιήθηκε από την 1η πέτρα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τη 2η πέτρα. Επομένως έχουν μείνει 3 θέσεις ώστε να τοποθετήσουμε την 3η πέτρα στην 3η γραμμή. 2 για την 4η και 1 για την 5η. Επομένως ο συνολικός αριθμός πιθανών τοποθετήσεων για μια συγκεκριμένη σειρά είναι: $(5)(4)(3)(2)(1)$. Επομένως ο συνολικός αριθμός των τρόπων που μπορούμε να επιλέξουμε 5 πέτρες ώστε να είναι σε διαφορετικές γραμμές και διαφορετικές στήλες είναι $(5!)(5!)$. Ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να επιλέξουμε 5 πέτρες από 25 πέτρες είναι $\frac{25!}{20!}$. Επομένως η πιθανότητα είναι $\frac{5!5!}{\frac{25!}{20!}}$.



Σχήμα 3: Επιλογή από διαφορετική σειρά και στήλη

Εναλλακτικός τρόπος σκέψης για το πρόβλημα είναι ο ακόλουθος. Υπαρχουν 25 θέσεις ώστε να επιλέξουμε την 1η πέτρα. Αν απορρίψουμε όλες τις υπόλοιπες θέσεις της γραμμής και της στήλης της 1ης πέτρας μένουν 16 πιθανές θέσεις ώστε να τοποθετήσουμε την 2η πέτρα. Μόλις την τοποθετήσουμε αποκλείουμε την γραμμή και την στήλη στις οποίες ανήκει. Απομένουν 9 θέσεις για την 3η πέτρα, 4 θέσεις για την 4η πέτρα και 1 θέση για την 5η πέτρα. Ο συνολικός αριθμός των τρόπων επιλογής για τις 5 πέτρες που βρίσκονται σε διαφορετικές γραμμές και στήλες είναι $(25)(16)(9)(4)(1)$. Η πιθανότητα είναι $\frac{(25)(16)(9)(4)(1)}{\frac{25!}{20!}}$.