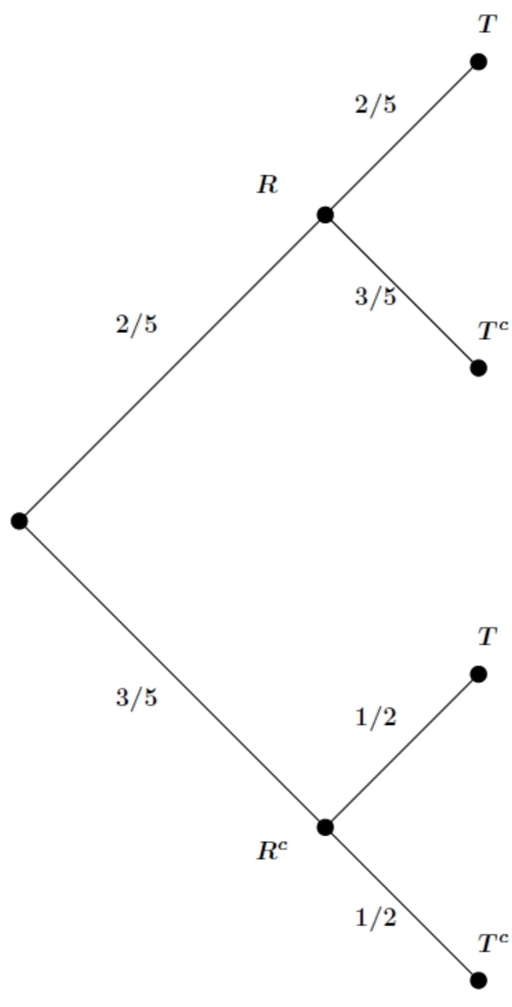
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2009
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 12/10/2009 Ημερομηνία Παράδοσης: 19/10/2009

Άσκηση 1.
(α) Έστω R το γεγονός ότι ο Γρηγόρης πάει για τρέξιμο, και T το γεγονός ότι προλαβαίνει το τρένο. Το δέντρο φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Δέντρο πιθανοτήτων για το πρωινό του Γρηγόρη

(β) Χρησιμοποιώντας το νόμο της ολικής πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T|R)P(R) + P(T|R^c)P(R^c) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \\ &= 0.46 \end{aligned}$$

(γ) Χρησιμοποιούμε το νόμο του *Bayes* και έχουμε:

$$\begin{aligned} P(R|T) &= \frac{P(T|R)P(R)}{P(T)} \\ &= 0.3478 \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

(α) Έστω D το γεγονός ότι κάποιος έχει την ασθένεια και T το γεγονός ότι η εξέταση βγήκε θετική. Τότε, $P(D) = 1/20$, $P(T^c, D) = 1/50$ και $P(T|D^c) = 1/10$.
Με χρήση του νόμου *Bayes* έχουμε:

$$\begin{aligned} P(D|T) &= \frac{P(T|D)P(D)}{P(T|D)P(D) + P(T|D^c)P(D^c)} \\ &= \frac{(49/50)(1/20)}{(49/50)(1/20) + (1/10)(19/20)} \\ &= 0.3403 \end{aligned}$$

(β) Έστω F το γεγονός ότι ο πατέρας έχει την ασθένεια και S το γεγονός ότι ο γιός έχει την ασθένεια. Τότε $P(F) = 1/20$, $P(S|F) = 4/5$ και $P(S|F^c) = 1/95$. Τότε:

$$\begin{aligned} P(F|S) &= \frac{P(S|F)P(F)}{P(S|F)P(F) + P(S|F^c)P(F^c)} \\ &= \frac{(4/5)(1/20)}{(4/5)(1/20) + (1/95)(19/20)} \\ &= 0.80 \end{aligned}$$

Άσκηση 3.

(α) Έστω A_i το γεγονός ότι εστάλη i και B_i το γεγονός ότι ελήφθη i. Χρησιμοποιώντας τον νόμο της ολικής πιθανότητας και της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} P(B_0) &= P(B_0|A_0)P(A_0) + P(B_0|A_2)P(A_2) \\ &= \frac{1}{2}(1-\epsilon) + \frac{1}{4}\epsilon = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\epsilon \end{aligned}$$

$$P(B_1) = \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{4}(1-\epsilon) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\epsilon$$

$$P(B_2) = \frac{1}{4}\epsilon + \frac{1}{4}(1-\epsilon) = \frac{1}{4}$$

Όπως ήταν αναμενόμενο το άθροισμα των πιθανοτήτων των γεγονότων B_i είναι 1.

(β)

$$\begin{aligned} P(A_0|B_1) &= \frac{P(A_0|B_1)}{P(B_1)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\epsilon}{\frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{4}(1-\epsilon)} \\ &= \frac{2\epsilon}{1+\epsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_1|B_1) &= \frac{\frac{1}{4}(1-\epsilon)}{\frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{4}(1-\epsilon)} \\ &= \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \\ P(A_2|B_1) &= 0 \end{aligned}$$

Μπορείτε να παρατηρήσετε ότι το άθροισμα των δεσμευμένων πιθανοτήτων είναι 1.

Άσκηση 4.
(α) Ο δειγματοχώρος του πειράματος της ρίψης 2 5-πλευρων ζαριών είναι: $\Omega = \{1,2,3,4,5\} \times \{1,2,3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}^2$. Υπάρχουν 25 δυνατά ισοπίθανα αποτελέσματα, αφού τα ζάρια είναι αμερόληπτα και οι ρίψεις ανεξάρτητες μεταξύ τους.
Σύμφωνα με τους ορισμούς των γεγονότων έχουμε:
A_1 = "Τουλάχιστον ένα από τα ζάρια φέρνει 5"
A_2 = "Τουλάχιστον ένα από τα ζάρια φέρνει 1"

i. Έχουμε:

$$P(A) = p(\{5,5\}) = \frac{1}{25}$$

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \sum_{j=1}^{5} p(\{5,j\}) + \sum_{i=1}^{4} p(\{i,5\}) \\ &= \frac{5}{25} + \frac{4}{25} = \frac{9}{25} \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι

$$P(A \cap A_1) = \frac{1}{25} \neq \frac{9}{25^2} = P(A)P(A_1)$$

Τα γεγονότα A και A_1 δεν είναι ανεξάρτητα.

ii. $P(A_2) = \sum_{j=1}^{5} p(\{1,j\}) + \sum_{i=2}^{5} p(\{i,1\}) = \frac{9}{25}$

Παρατηρήστε ότι

$$P(A \cap A_2) = p(\{\emptyset\}) = 0 \neq \frac{9}{25^2} = P(A)P(A_2)$$

Τα γεγονότα A και A_2 δεν είναι ανεξάρτητα.

(β) Έστω τα γεγονότα:
B_1 = "Έρχονται διπλές"
B_2 = "Τουλάχιστον ένα από τα ζάρια να έχει φέρει 3"
i.

$$P(B) = p(\{4,4\}) + p(\{3,5\}) + p(\{5,3\}) = \frac{3}{25}$$

$$P(B_1) = \sum_{i=1}^{5} p(\{i,i\}) = \frac{5}{25}$$

Παρατηρήστε ότι

$$P(B \cap B_1) = p(\{4,4\}) = \frac{1}{25} \neq \frac{3 \cdot 5}{25^2} = P(B)P(B_1)$$

Τα γεγονότα B και B_1 δεν είναι ανεξάρτητα.

ii.

$$P(B \cap B_2) = p(\{3,5\}) + p(\{5,3\}) = \frac{2}{25}$$

Επομένως έχουμε:

$$P(B_2|B) = \frac{P(B \cap B_2)}{P(B)} = \frac{2/25}{3/25} = \frac{2}{3}$$

iii.

$$P(B \cap A_1) = p(\{3,5\}) + p(\{5,3\}) = \frac{2}{25}$$

Επομένως

$$P(A_1|B) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} = \frac{2/25}{3/25} = \frac{2}{3}$$

Άσκηση 5.

Έστω Ω το σύνολο των ζευγαριών των αποτελεσμάτων (ρίψη του μπλέ ζαριού, ρίψη του κόκκινου ζαριού). Τότε $\Omega = \{1,2,...,6\}^2$. Η αναπαράσταση του Ω φαίνεται στον παρακάτω πίνακα όπου οι γραμμές αντιστοιχούν στην μπλέ ρίψη και η στήλες αντιστοιχούν στην κόκκινη ρίψη.

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}$$

(α) Τα αποτελέσματα που είναι κάτω από την κύρια διαγώνιο του πίνακα περιγράφουν το γεγονός A. Το γεγονός περιλαμβάνει 15 από τα 36 αποτελέσματα (τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα), έτσι $P(A) = 15/36 = 5/12$.

(β) Έστω B το γεγονός να μην μπορεί να φέρει 6 το μπλέ ζάρι. Για να υπολογίσουμε την δεσμευμένη πιθανότητα $P(A|B)$ θα πρέπει να γνωρίζουμε τις πιθανότητες $P(A \cap B)$ και $P(B)$. Παρατηρούμε ότι $P(B) = 5/6$. Για τον υπολογισμό της $P(A \cap B)$ παρατηρήστε ότι τα αποτελέσματα που περιγράφουν το $A \cap B$ είναι αυτά που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο εκτός από την τελευταία σειρά. Δηλαδή $P(A \cap B) = 10/36 = 5/18$.
Επομένως:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5/18}{5/6} = \frac{1}{3}.$$

(Μπορούμε ακόμη να εκφράσουμε το $A \cap B$ σαν 10 από τα 30 αποτελέσματα του B.)

(γ) Για να περιγράψουμε το "πειραγμένο" μπλέ ζάρι, ορίζουμε $p_1, p_2, ..., p_6$ ώστε $p_i = P($το αποτέλεσμα του μπλέ ζαριού είναι $i)$. Τα αποτελέσματα που οδηγούν στην νίκη του παίχτη είναι εκείνα που ανήκουν στην δευτερεύουσα διαγώνιο του πίνακα και εφόσον το κόκκινο ζάρι είναι αμερόληπτο, έχουμε: $P(1,6) = \frac{1}{6}p_1, P(2,6) = \frac{2}{6}p_2, k.o.k$

Προσθέτοντας τις πιθανότητες έχουμε:

$$P(\textit{ο παίχτης κερδίζει}) = \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}p_2 + \frac{1}{6}p_3 + \frac{1}{6}p_4 + \frac{1}{6}p_5 + \frac{1}{6}p_6 = \frac{1}{6}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6).$$

Όπως και να είναι πειραγμένο το ζάρι, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$. Επομένως η πιθανότητα να κερδίσει είναι $1/6$ με όλες τις ισοδύναμες πιθανότητες του μπλέ ζαριού. (Και τα 2 ζάρια θα πρέπει να "πειραχτούν" για να επηρεαστεί η πιθανότητα νίκης).

Άσκηση 6.

Η πιθανότητα οποιουδήποτε ζεύγους ανθρώπων να πετυχαίνουν την ίδια πλευρά κατά την ρίψη είναι $1/n^2$ και υπάρχουν n πιθανές πλευρές για να έρθουν ίδιες. Επομένως:

$$P(A_{12}) = P(A_{13}) = P(A_{23}) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Ακόμη:

$$P(A_{12}) \cap P(A_{13}) = P(\textit{όλοι οι παίχτες φέρνουν την ίδια πλευρά}) = \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

και

$$P(A_{12}) \cap P(A_{13}) = P(A_{12}) \cdot P(A_{13}).$$

Επομένως τα A_{12} και A_{13} είναι ανεξάρτητα και ίδια για κάθε άλλο ζεύγος από τα γεγονότα A_{12}, A_{13} και A_{23}. Ωστόσο τα A_{12}, A_{13} και A_{23} δεν είναι ανεξάρτητα. Εάν συμβούν τα A_{12} και A_{13} τότε συμβαίνει και το A_{23} επίσης. Πιο επίσημα: $P(A_{23}|A_{12} \cap A_{13}) = 1 \neq P(A_{23})$.

Άσκηση 7.

Έστω T_n το γεγονός ότι στην n ρίψη του ζαριού έρχεται μπλέ πλευρά.

(α) Έστω E_1 το γεγονός ότι έρχεται Κορώνα, και E_2 το γεγονός ότι ερχεται Γράμματα. Τότε:

$$P(T_n) = \frac{1}{2}P(T_n|E_1) + \frac{1}{2}P(T_n|E_2) = \frac{1}{2}(\frac{5}{6} + \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}.$$

(β) Ομοίως,

$$P(T_n \cap T_{n+1}) = \frac{1}{2}P(T_n \cap |E_1) + \frac{1}{2}P(T_n \cap T_{n+1}|E_1) = \frac{1}{2}((\frac{5}{6})^2 + (\frac{1}{2})^2) = \frac{17}{36}.$$

(γ) Τέλος,

$$\begin{aligned}
P(T_{n+1}|T_1 \cap T_2 \cap ... \cap T_n) &= \frac{P(T_{n+1} \cap T_1 \cap T_2 \cap ... \cap T_n)}{P(T_1 \cap T_2 \cap ... \cap T_n)} \\
&= \frac{P(T_{n+1} \cap T_1 \cap T_2 \cap ... \cap T_n)}{P(E_1)P(T_1 \cap T_2 \cap ... \cap T_n|E_1) + P(E_2)P(T_1 \cap T_2 \cap ... \cap T_n|E_2)} \\
&= \frac{(\frac{5}{6})^{n+1} + (\frac{1}{2})^{n+1}}{(\frac{5}{6})^n + (\frac{1}{2})^n}
\end{aligned}$$

Καθώς το n αυξάνεται, η δεσμευμένη πιθανότητα τείνει στο $\frac{5}{6}$. Μπορούμε να ερμηνεύσουμε το αποτέλεσμα μας με τον ακόλουθο τρόπο: Εφόσον όλες οι πρώτες ρίψεις φέρνουν μπλέ πλευρά, είναι πιο πιθανό να χρησιμοποιήσαμε το ζάρι που έχει περισσότερες πλευρές μπλέ (γεγονός E_1). Χρησιμοποιούμε τον νόμο του $Bayes$ για να βρούμε την πιθανότητα να χρησιμοποιήσαμε το πρώτο ζάρι δεδομένου ότι οι n πρώτες ρίψεις έχουν φέρει μπλέ πλευρά:

$$
\begin{aligned}
P(E_1|T_1 \cap T_2 \cap ... \cap T_n) &= \frac{P(E_1)P(T_1 \cap T_2 \cap ... \cap T_n|E_1)}{P(E_1)P(T_1 \cap T_2 \cap ... \cap T_n|E_1 + P(E_2)P(T_1 \cap T_2 \cap ... \cap T_n|E_2)} \\
&= \frac{(\frac{5}{6})^n}{(\frac{5}{6})^n + (\frac{1}{2})^n}
\end{aligned}
$$

Καθώς το n αυξάνεται, η δεσμευμένη πιθανότητα που χρησιμοποιούμε στο πρώτο ζάρι (γεγονός E_1) πλησιάζει στο 1. Έτσι, περιμένουμε η δεσμευμένη πιθανότητα να έρθει μπλέ πλευρά στην επόμενη ρίψη να προσεγγίζει την πιθανότητα όπου στην πρώτη ρίψη έρχεται μπλέ πλευρά, δηλαδή $\frac{5}{6}$.